

Das Ising-Modell im Skalenlimit als Modell
zur Beschreibung von Elementarteilchen

Dissertation
der Fakultät für Physik
der Ludwig-Maximilians-Universität

München

vorgelegt von
Wolfgang Weinzierl
aus München

München, den 16. September 1981

Inhaltsverzeichnis

	Seite
Zusammenfassung	iii
1. Einleitung	1
1.1 Motivation und Problemstellung	1
1.2 Das Ising-Modell und seine Geschichte	5
1.3 Proliferation und Modell einer Elementarteilchen- theorie	7
2. Ising-Feldtheorie im Operator- bzw. Hamiltonformalismus	11
2.1 Das Modell	11
2.2 Transfermatrix	13
2.3 Jordan-Wigner-Transformation	17
2.4 Bewegungsgleichung der Fermionen	19
2.5 Skalenlimes der Bewegungsgleichungen	21
2.6 Diagonalisierung der Transfermatrix	28
2.7 Skalenlimes des Hamiltonoperators im Impulsraum	33
2.8 Skalenlimes des Majoranaspinors ψ_j	36
3. Ising-Feldtheorie im Lagrangeformalismus	40
3.1 Graphische Entwicklung der Zustandssumme	40
3.2 Geometrische Darstellung nach Peierlskonturen und Dualität	44
3.3 Das Integral über Grassmannvariable	47
3.4 Berechnung der Zustandssumme in kovarianter Weise	53
3.5 Ableitung einer Lagrangedichte im Skalenlimes	57
3.6 Skalenlimes in der Ortsraumdarstellung der Wirkung	63
3.7 Übergang von der Hamilton- zur Lagrangedichten- beschreibung	66

	Seite
4. Zweipunktfunktionen in der Ising-Feldtheorie	71
4.1 Darstellung der Korrelationsfunktionen $\langle \sigma_{00} \sigma_{ij} \rangle$ $\langle \mu_{00} \mu_{ij} \rangle$ durch freie Propagatoren	71
4.2 Die Zweipunktfunktion $\langle \sigma_{00} \sigma_{ij} \rangle$ im Skalenlimes für $T \gtrsim T_c$	79
4.3 Die Zweipunktfunktion des Ordnungsparameters $\sigma(x)$ und Unordnungsparameter $\mu(x)$ im Impulsraum	83
5. Die Teilchenfeldoperatoren $\sigma(x)$ und $\mu(x)$ und ihre Dynamik	93
5.1 Relation zwischen den Teilchenfeldoperatoren $\sigma(x)$ und $\mu(x)$. Dressing Operator	93
5.2 Die Operatoren σ_j und μ_j und ihr Skalenlimes	98
5.3 Die Dynamik in den Teilchenfeldoperatoren	102
5.4 Zusammenfassung und offene Fragen	106
Schlußfolgerungen und mögliche Perspektiven	108
Anhang A: Dynamik der Fermionen c_j, c_j^+	109
Anhang B: Entwicklungen um die kritische Temperatur	112
Anhang C: Berechnung der Fermionkorrelation $\langle n_{ij}^+ n_{ek} \rangle$	115
Anhang D: Verhalten der Skalenfunktionen für große und kleine Abstände	121
Literaturverzeichnis	123



Zusammenfassung

Es gibt im wesentlichen zwei Ansätze einer tiefergehenden Analyse unserer heutigen Theorien der elektroschwachen und starken Wechselwirkung. Im ersten Ansatz versucht man, durch Einführung von Bausteinen bzw. Unterstrukturen, wie z.B. Subquarks, Dressingoperatoren usw., im zweiten durch Einführung einer großen Gruppe, wie z.B. $SU(5)$, $SO(10)$ usw., ein tieferes Verständnis für die in der Natur vorkommenden Wechselwirkungen und deren Manifestationen durch "Elementarteilchen" zu erlangen.

In dieser Arbeit soll ein dritter möglicher Weg beschritten werden, der von der Ableitung einer Quantenfeldtheorie aus einfachsten statistischen Freiheitsgraden ausgeht, wie etwa einem Zweiniveausystem. An einer Modelltheorie, dem Ising-Modell in (1+1) Dimensionen wird diese Idee erläutert.

Um von den statistischen Freiheitsgraden zu einer Quantenfeldtheorie zu kommen, muß man das statistische System an der kritischen Temperatur betrachten; d.h. dort, wo die Korrelationslänge in Einheiten der Gitterlänge gegen unendlich geht. Es wird ein gekoppelter Grenzwert betrachtet, in dem die Temperatur gegen die kritische Temperatur und die Gitterlänge gegen Null geht. Die entstehenden Quantenfelder erscheinen dabei als kritisches Phänomen eines statistischen Ensembles. Effektive "makroskopische" Eigenschaften, wie Korrelationslänge oder Massen in unserem Einheitensystem werden während diesem korrelierten Grenzwert festgehalten.

In unserer Modelltheorie entstehen zwei teilcheninterpretierbare Quantenfelder $\phi_i(x)$, die durch ein Basisfeld $\psi(x)$, das die lokale Dynamik am einfachsten parametrisiert, aufgebaut werden können. Diese sogenannte Proliferation wird näher untersucht. Für die Proliferation des Basisfeldes ist eine Erhaltungsgröße, eine Art Parität notwendig. Die Stabilität der beiden Teilchenfelder ist eine Folge dieses Erhaltungssatzes. Zur Identifikation der "teilcheninterpretierbaren" Felder werden die Propagatoren des Ordnungs- und Unordnungsparameterfeldes berechnet und diskutiert. Ein effektiver Hamiltonoperator in diesen Teilchenfeldern wird berechnet.

Als weiterer Aspekt des Übergangs vom statistischen System zur Quantenfeldtheorie wird die dimensionale Transmutation und die damit eng zusammenhängende Massenrenormierung untersucht. Auf dem Niveau des Spinsystems

haben wir keine dimensionsbehafteten Größen zur Verfügung. Im Verlauf der Skalierung der Theorie entwickelt sich durch Berücksichtigung der Gitterkonstanten eine Masse, d.h. eine dimensionsbehaftete Größe.

Die Beziehung zwischen Spinsystemen im kritischen Bereich und fermionischen Feldtheorien wird aufgezeigt. Dabei stellt sich heraus, daß gewisse fermionische Freiheitsgrade der Spinsysteme im Skalenlimes "aussterben". Die "makroskopisch" relevanten Freiheitsgrade konstituieren ein relativistisches Majoranafeld.

1. Kapitel - Einleitung

1. Motivation und Problemstellung

In den zur Beschreibung von Elementarteilchen und ihren Wechselwirkungen verwendeten relativistischen Quantenfeldtheorien (QFT), wie z.B. der Quantenelektrodynamik (QED), Quantenchromodynamik (QCD) und der Quantenflavourdynamik (QFD), werden beobachteten Teilchen Quantenfelder zugeordnet. Die Eigenschaften dieser Teilchen, wie Spin, Masse, elektrische Ladung usw. werden im Formalismus der QFT durch den quadratischen Term in einer, die Dynamik der Teilchen festlegenden, Lagrangedichte ausgedrückt. Hieraus lassen sich die freien Propagatoren der Teilchen berechnen.

Wechselwirkung zwischen diesen Teilchen wird durch Terme höherer Ordnung, also durch Produkte von eben diesen Quantenfeldern, den sogenannten Kopplungstermen beschrieben. Mittels Störungstheorie nach diesen Kopplungstermen berechnet man die für die Experimente wichtigen Streudaten. Dieses vor allem in der QED erfolgreiche Rezept beruht auf der Kleinheit des Kopplungsterms relativ zum quadratischen Term der Lagrangedichte.

Als Bindungszustände der a priori als fundamental bezeichneten Teilchen (z.B. Leptonen und Quarks sowie Eichteilchen und Higgsskalare) sollten dann die "weniger" fundamentalen Teilchen (z.B. Hadronen, Mesonen, Atome usw.) beschrieben werden. Solange die Bindungsenergien viel kleiner als die Ruhemassen der a priori festgelegten, fundamentalen Teilchen sind, was z.B. in der Atomphysik, einem Anwendungsbeispiel der QED, der Fall ist, führt dieses Prinzip zu ziemlich guten Ergebnissen. Wenn aber die Bindungsenergien dieselbe Größenordnung wie die Teilchenenergien haben, so verliert der Begriff der Fundamentalität eines Teilchens seine Bedeutung. Diese Tatsache betonte Heisenberg immer wieder [1].

Als deutlichster Hinweis darauf, daß wir mit dem "Baukasten"-Prinzip üblicher Art am Ende angelangt sind, ist die Nichtexistenz freier Quarks anzusehen. Der Begriff "confinement" für diese Tatsache steht dafür, daß es nötig ist, zur Beschreibung der Teilchen auch Felder zu betrachten, die nicht notwendig als asymptotische Streuzustände vorkommen. Die lokale Dynamik für sehr große Energien (> 10 GeV) wird dagegen offenbar relativ gut durch diese Felder parametrisiert.

Einen weiteren Hinweis auf den zu engen Rahmen der oben geschilderten Einführung von QFTen bildet die in diesem Formalismus notwendige Betrachtung von Higgs-Teilchen. So haben z.B. im Weinberg-Salam-Modell (WSM) diese Teilchen nur die Aufgabe, die Nichttrivialität des Vakuums zu parametrisieren - eine Eigenschaft, die vorher stillschweigend gefordert wurde. Das Unbehagen über die Komplexität dieses Higgs-Sektors äußert sich auch in dem fortschreitenden Bestreben, ihn dynamisch aus den übrigen "fundamentalen" Teilchen konstruieren zu wollen.

Von der theoretischen Seite der Beschreibung von Elementarteilchen stellt sich die Frage, ob die so eingeführten QFTen mehr sind, als eine gute und erfolgreiche Parametrisierung der in der Natur sichtbaren Symmetrien und Teilchen. Ein Verständnis des Teilchenbegriffs ist damit auf alle Fälle nicht erreicht worden. Eine Analogie sollte dies klarmachen.

Die in der Natur beobachteten Spektrallinien (analog zu den Teilchen) des Wasserstoffatoms können ziemlich gut durch die Balmerreihe (Quantenfelder) wiedergegeben werden. Ein Verständnis für diese Spektrallinien kam aber erst mit der Entwicklung der Quantenmechanik. Erst die Quantenmechanik hat erklärt, warum und welche diskreten Energieniveaus in der Natur auftreten.

Auf unseren Fall bezogen, wäre die die Natur sehr gut parametrisierende Balmerreihe mit den oben eingeführten QFTen zu vergleichen. Ebenso wie sich aus der Komplexität der verschiedenartigen Spektrallinien die Notwendigkeit einer Analyse des Energieniveaubegriffs ergab, ergibt sich hier die Notwendigkeit der Analyse des Feldbegriffs. So wie es in der Atomphysik zu einem tieferen Verständnis nicht ausreichte, alle möglichen Gesetzmäßigkeiten durch Serien und Bänder zu parametrisieren, wird es uns im Fall der Elementarteilchenphysik nicht weiterbringen, die vorhandenen QFTen, die die Teilchen beschreiben, einfach anzugeben. Vielmehr sollte es neben einer Beschreibung der Wechselwirkungen und der Elementarteilchenwelt durch die Gruppe $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$ auch Bestrebungen geben, solch eine QFT aus einem Grundprinzip abzuleiten. Die vorliegende Arbeit wird sich mit einem der möglichen Wege dazu beschäftigen.

Die Notwendigkeit, ein tieferes Niveau der Beschreibung zu erreichen, ergibt sich auch aus dem mehr qualitativen Aspekt, daß zur Definition dieser QFTen etwa 20 Parameter angepaßt und ebenso viele Felder eingeführt werden müssen.

Um zu einem Verständnis für die doch relativ komplizierte Struktur (z.B. $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$) zu kommen, sind mir drei wesentlich verschiedene Ansätze bekannt:

- (1) Man sucht nach einem oder ein paar Quantenfeldern, aus denen alle bekannten, die Elementarteilchen beschreibenden Felder "zusammengesetzt" sind. Die Dynamik dieser Grundbausteine müßte die beobachtete Struktur liefern. Nimmt man weiterhin an, daß diese Grundbausteine, Quantenfelder sind, die Teilchen beschreiben können, so bewegt man sich auf aus Atom- und Kernphysik bekanntem Boden. Alle Pre-Quark-Modelle herkömmlicher Art gehören dazu [2,4]. Sind die Grundbausteine nicht mehr durch Quantenzahlen freier Teilchen charakterisiert, so hat man zwar den Teilchencharakter aufgegeben, aber den Feldbegriff bereits auf dem Niveau dieser Grundbausteine eingeführt. Die von Heisenberg initiierte nichtlineare Feldtheorie und deren Weiterentwicklung durch die Arbeiten von Dürr, Saller [1,3,4,5,6] gehört zu dieser Gruppe.
- (2) Eine zweite Möglichkeit besteht in der Einführung einer großen Gruppe, wie z.B. $SU(5)$ oder $SO(10)$, die bei großen Energien relevant werden sollte, bei kleinen Energien (jetzige Beschleunigerenergien) dagegen stark gebrochen wird. Mit Hilfe von (evtl. dynamisch generierten) sogenannten Higgs-Mechanismen sollte dann diese Gruppe in natürlicher Weise zur bekannten Struktur "herunterbrechen".

Die heute als fundamental erkannten Teilchen erscheinen in diesem Schema als irreduzible Darstellungen dieser großen Gruppe [7,8]. Die sogenannten "Grand Unifying Theories" (GUT) erklären zwar die komplizierte Faktorgruppenstruktur, aber die Vielfalt der Teilchen, sowie die Existenz von Eichteilchen und Higgs-Teilchen und deren überaus komplizierten Wechselwirkungsterme (Higgs-Potential) muß a priori angenommen werden. Die Frage nach der Struktur von $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$ wurde abgewälzt auf die Frage: Warum $SU(5)$ (oder eine andere GUT) und deren komplizierter Higgs-Sektor ?

- (3) Eine dritte Möglichkeit, zu einem Verständnis zu kommen, geht von der Frage nach der Konstruktion einer relativistischen lokalen Feldtheorie aus. Im Gegensatz zu Punkt (1) und (2), wo a priori eine lokale QFT

angenommen wurde, wird hier die Frage nach der Stabilität von QFT gestellt. Wir wissen aus der Theorie der kritischen Phänomene [9], daß ein System von unendlich vielen Freiheitsgraden im thermischen Gleichgewicht in der Nähe der kritischen Temperatur, d.h. der Temperatur, bei der die Korrelationslängen gegen unendlich gehen, sehr gut durch eine Feldtheorie beschrieben werden kann. Will man zu einer realistischen vierdimensionalen (3 Raum + 1 Zeit-Dimension) Feldtheorie kommen, so hat man ein statistisches System in einem 4-dimensionalen euklidischen Raum zu betrachten. Die Auszeichnung der Zeitachse geschieht durch Wick-Rotation bezüglich einer der 4 Richtungen. Die Struktur der Freiheitsgrade desjenigen statistischen Systems, das auf die realistische QFT führt, ist a priori nicht bekannt. Hier müßte das Prinzip der Einfachheit angewandt werden. Wie wir später sehen werden, führt der einfachste Freiheitsgrad, d.h. ein 2-Niveausystem, schon auf sehr komplizierte QFTen. Falls man gezwungen wäre, sehr vielschichtige mikroskopische Freiheitsgrade zu betrachten, ist das Prinzip der Einfachheit verletzt und dieser Versuch gescheitert. Aus der Festkörperphysik jedenfalls wissen wir, daß z.B. in einem Kristall viele verschiedene Quasiteilchen existieren können, obwohl die mikroskopischen Freiheitsgrade ziemlich einfach sind.

Im Skalenlimes des statistischen Systems, d.h.

- 1) mittlerer Abstand der mikroskopischen Freiheitsgrade
 $\equiv a \rightarrow 0$
- 2) Temperatur $\equiv T \rightarrow T_c$ (kritische Temperatur)
- 3) Umskalierung der Freiheitsgrade

entsteht eine per definitionem renormierbare Feldtheorie. Diejenigen Felder, die im Skalenlimes endliche Korrelationen haben, werden überleben und sind eventuell mit physikalischen Teilchen in Beziehung zu setzen. Ein Beispiel dafür, wie gewisse Felder in diesem Limes aussterben, werden wir in Kap. 3.5 behandeln. Wir werden in dieser Arbeit versuchen, die dritte Möglichkeit, zur effektiven Feldtheorie zu kommen, an einem einfachen Beispiel klarzumachen. Falls dieser Weg erfolgreich ist, erwarten wir uns von der resultierenden Feldtheorie folgende wichtige Eigenschaften:

- 1) euklidische Invarianz, d.h. nach Wick-Rotation relativistische Invarianz,
- 2) Proliferation, das ist das Auftreten mehrerer Felder, die alle in einer effektiven Beschreibung wichtig werden,
- 3) ein Spektrum ohne Lücke, (gap-los), d.h. es existieren masselose Teilchen, wie z.B. Photonen. Mit diesen Teilchen sollte eine lokale Symmetrie, z.B. Eichsymmetrie verbunden sein.
- 4) ein massives Teilchen, etwa das Elektron, das die Skala des Spektrums bestimmt und an unser Einheitensystem angepaßt wird. Die mikroskopischen Größen $T-T_c$, sowie der Abstand a verschwinden im Skalenlimes. Dafür sollte ein neuer freier Parameter, eine Masse, generiert werden. Dies ist in einer Feldtheorie als dimensionale Transmutation [10] bekannt. Alle weiteren Kopplungen und Massen sind dann durch die Dynamik des Systems bestimmt.
- 5) Neben den Eichfeldern (Punkt 3) sollten Fermionen, also Teilchen mit Fermi-Statistik entstehen.
- 6) Das entstehende Muster der Symmetriebrechung sollte den phänomenologischen Theorien entsprechen.

Von diesen Punkten interessiert uns vor allem die Möglichkeit der Proliferation, also die Möglichkeit, aus dem mikroskopischen Freiheitsgrad mehr als ein Quantenfeld zu konstruieren.

2. Das Ising-Modell und seine Geschichte

Eines der bekanntesten und am besten verstandenen statischen Systeme ist das Ising-Modell. Der mikroskopische Freiheitsgrad ist hier eine Spinvariable σ , eine Größe, die die Werte $+1$ und -1 annehmen kann. Sie wird auf ein euklidisches Gitter gesetzt. Die Symmetrie, unter der dieses Modell invariant ist, ist die einfachste diskrete abelsche Gruppe, nämlich Z_2 . Es dient als einfachstes Modell für Symmetriebrechung, denn für $T < T_c$ besitzt es einen zweifach entarteten Grundzustand. Das einzige, was von Forderung 6) des vorigen Abschnitts bleibt, ist die Tatsache, daß es Symmetriebrechung gibt. In der statistischen Physik wird das Isingmodell, das exakt lösbar ist, als Prototyp eines Phasenübergangs 2. Art verwendet.

In der Festkörperphysik dient es zur Beschreibung von Kristallen mit mikroskopischen Zweiniveausystemen an deren Gitterpunkten. In zwei Dimensionen ist die Zustandssumme des Modells von Onsager [11] angegeben worden. Eine, den fermionischen Aspekt der Theorie (Punkt 5) in den Vordergrund stellende

Behandlung der Zustandssumme wurde von Kaufman [31] gegeben. Lieb, Mattis, Schultz [12] diagonalisierte die Transfermatrix, die die Dynamik des Systems bestimmt, vollständig. Auch alle Korrelationsfunktionen der Spinvariablen sind seit kurzem als geschlossene Integralausdrücke bekannt [13,14].

Die Theorie hat einen kritischen Bereich, $T \approx T_c$, der von Kadanoff untersucht worden ist [15]. Die Felder oder Variablen, die in diesem Bereich riesige Fluktuationen erleiden, sind ebenfalls untersucht worden [16]. Der Skalenlimes dieses Modells ist von Wu et al. [17] behandelt worden, und es zeigt sich, daß die Korrelationen in diesem Limes euklidisch kovariant sind. Einige Aspekte dieser so entstehenden, Punkt 1) unserer Forderungen genügenden, Quantenfeldtheorie wurde von Sato et al. [18] untersucht.

Da diese QFT aus einem Skalenlimes konstruiert ist und auch alle Korrelationsfunktionen bekannt sind, wollen wir an ihr die Idee der Proliferation erläutern.

Diese Art der Definition einer QFT beinhaltet automatisch eine befriedigende Behandlung folgender Probleme

- 1) Regularisierung (cut-off Parameter $t = \frac{T-T_c}{T_c}$),
- 2) Renormierung (Anpassung der Masse),
- 3) Definition und Eigenschaften des Hilbertraums,
- 4) Bestimmung der teilcheninterpretierbaren Felder und deren Vertauschungsrelationen.

Eine realistische Theorie, die die Natur beschreiben soll, müßte natürlich vierdimensional sein. Wir wissen, daß in 3 oder 4 Dimensionen im Ising-Modell lokale Symmetrien eine Rolle spielen. Um dies zu sehen, muß man die zur Spinvariablen duale Variable betrachten [19]. Die Erfüllung der Forderung 3) kann man also nicht von unserem zweidimensionalen Modell erwarten. Der fermionische Charakter (Punkt 5) sowie die dimensionale Transmutation (Punkt 4 unseres Forderungskatalogs) können dagegen bereits in zwei Dimensionen diskutiert werden.

Es zeigt sich, daß die Selbstdualität, eine Spiegelungssymmetrie um die kritische Temperatur, d.h. die Dualität nach Kramers, Wannier [20] im Skalenlimes als zweidimensionale 't Hooft-Algebra [21] zweier dualer Felder wieder auftaucht. Für die Stabilität dieser Felder sind topologische Aspekte wichtig. Das eine Feld kann als Soliton oder Kink des anderen Feldes betrachtet werden. Es zeigt sich somit, daß Punkt 2) unserer Forderungen von Abschnitt 1 in primitivster Weise in diesem einfachen Modell erfüllt wird.

3. Proliferation und Modell einer Elementarteilchentheorie

Bei der Lösung des Ising-Modells zeigt sich, daß Fermionen die Theorie diagonalisieren. Im Skalenlimes (definiert in Kap. 2.5) wird daraus ein Majoranafeld $\Psi(x)$ (s. Kap. 2.8).

Da die Freiheitsgrade $\Psi(x)$ die Dynamik des Systems am einfachsten beschreiben, nennen wir diese mathematische Variable Basisfeld $\Psi(x)$. Interpolierende Felder nach Lehmann, Symanzik, Zimmermann (LSZ) [22], die für die Zeit $t \rightarrow \pm \infty$ freie Felder werden, wollen wir Teilchenfelder $\Phi_i(x)$ nennen.

Der Zusammenhang $\Phi_i = \Phi_i(\Psi)$ wird als dynamische Abbildung bezeichnet [23]. Falls aus einem Basisfeld $\Psi(x)$ mehr als ein Teilchenfeld $\Phi(x)$ entsteht, sprechen wir von Proliferation [24]. In unserem Beispiel sind die dualen $\sigma(x)$ und $\mu(x)$ die Teilchenfelder, das Majoranafeld $\Psi(x)$ dient als Basisfeld. Schematisch gilt

$$\Psi(x) \xrightarrow{\text{Proliferation}} \begin{pmatrix} \sigma(x) \\ \mu(x) \end{pmatrix}$$

Wir haben also zu untersuchen, welche Faktoren für den Übergang der Dynamik der Basisfelder zur Dynamik der Teilchenfelder verantwortlich sind. Wir werden sehen, daß die Randbedingungen an das Basisfeld eine entscheidende Rolle spielen beim Übergang von einer "freien" Majorana-Theorie zu einer wechselwirkenden Theorie von Teilchenfeldern.

In einer realistischen Theorie, etwa dem vierdimensionalen Ising-Modell, ist aus den Erkenntnissen auf dem Gitter [25] zu erwarten, daß das Basisfeld, hier ein Fermifeld, mit sich selbst wechselwirkt. Falls im Skalenlimes eine relativistisch invariante Theorie entsteht, (wie im zweidimensionalen Fall) könnte dieses Basisfeld, das 8 reelle Komponenten enthält, ein komplexes Diracfeld mit Selbstwechselwirkung werden. Ebenso wäre ein komplexes Weylfeld mit zwei inneren Freiheitsgraden mit der Zahl der Komponenten verträglich [26]. Falls man annimmt, daß das Eichfeld dynamisch erzeugt wird, [27] so haben wir dann den Fall analog zur Supraleitung 2. Art, in der dienackten Elektronen mit Selbstwechselwirkung (die die Phononwechselwirkung ersetzt) unter dem Einfluß des Eichfeldes in Quasielektronen (Leptonen) und Vortizes (Hadronen) proliferieren. Der Übergang von der mikroskopischen BCS-Theorie [28] der Supraleitung zur mehr effektiven Theorie der Cooperpaardichte, d.h. der Ginzburg-Landau-Theorie [29] ist ein Beispiel für einen ersten Schritt von der Dynamik

der Basisfelder zur Dynamik der Teilchenfelder [30]. Der zweite Schritt wäre der von der Cooperpaardichte zu den Vortizes. Wenn man optimistisch ist, könnte man folgendes Schema einer Ableitung der phänomenologischen Teilchendynamik vorschlagen:

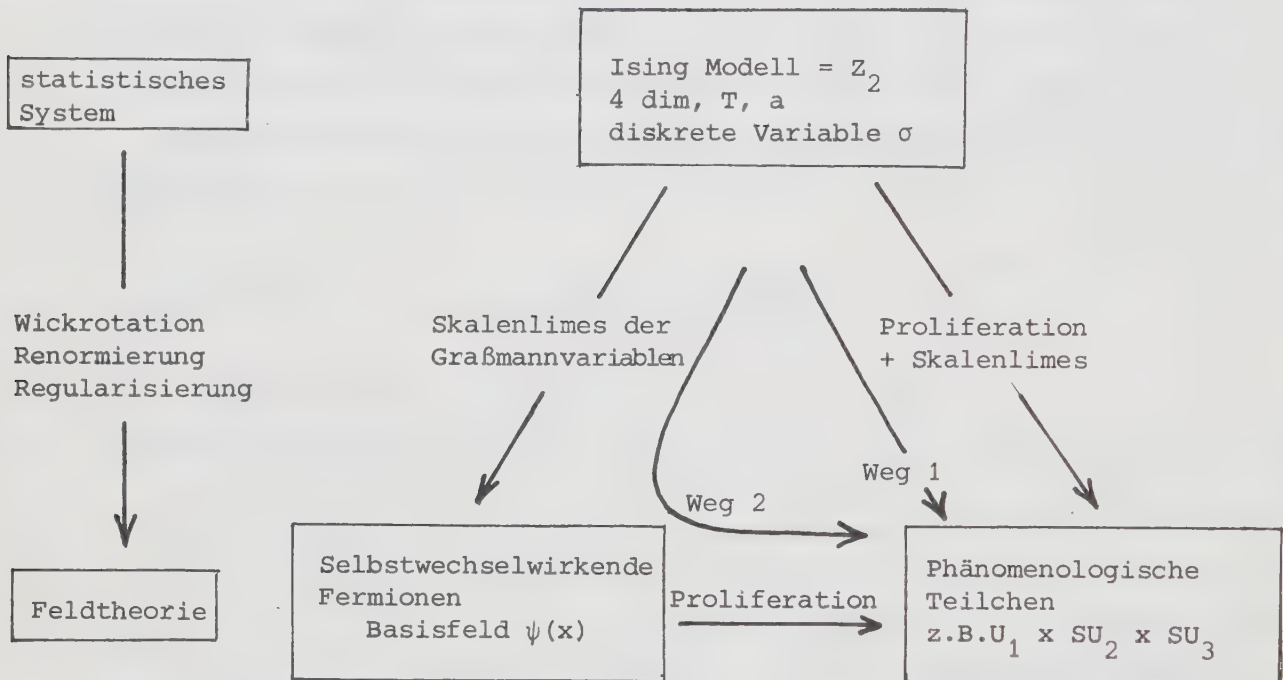


Fig. 1.1 Modell einer Elementarteilchentheorie

Auf dem Weg 2 versucht man den Übergang in zwei Schritten zu vollziehen. Zuerst wird der Skalenlimes in den Basisfeldvariablen, nämlich den Graßmann-Variablen durchgeführt. Von der Feldtheorie dieser nicht-teilcheninterpretierbaren Basisfreiheitsgrade kommt man dann im nächsten Schritt durch Proliferation zu den phänomenologischen Theorien. Auf dem Weg 1 erfolgt Proliferation und Skalenlimes gemeinsam. Welcher der beiden Wege leichter zu gehen ist, ist unbekannt. In unserer zweidimensionalen Modelltheorie jedenfalls lassen sich beide gehen. In Fig. 1.2 wird dies sichtbar.

Die Arbeit gliedert sich folgendermaßen:

In Kapitel 2 wird die Ising-Feldtheorie im Transfermatrix-Formalismus vorgestellt. Hierbei wird die Bedeutung des Majorana-Feldes hervorgehoben.

In Kapitel 3 wird die Theorie mit Hilfe einer Lagrangedichte funktional-theoretisch behandelt. Die Beziehung zwischen den fermionischen Feldtheorien und den Spinsystemen wird gezeigt. Aus der Darstellung durch Grassmann-Variable wird im Skalenlimes die Lagrangedichte eines Majoranafeldes hergeleitet.

In Kapitel 4 werden die Korrelationsfunktionen der Spinvariablen mit Hilfe der fermionischen Hilfsfelder berechnet und der Skalenlimes durchgeführt.

In Kapitel 5 wird die Theorie mit Hilfe der dualen Variablen dargestellt. Ein "Dressingoperator" als Vermittler zwischen diesen Variablen wird eingeführt. Die Beziehung zwischen dem Basisfeld und den dualen Variablen wird angegeben.

Die Beziehungen zwischen den einzelnen Darstellungen der Theorie ist in Fig. 1.2 in einem Diagramm gezeigt, Kapitel und Abschnitt ist jeweils an den entsprechenden Stellen angegeben. Dies sollte eine erste Orientierung erleichtern.

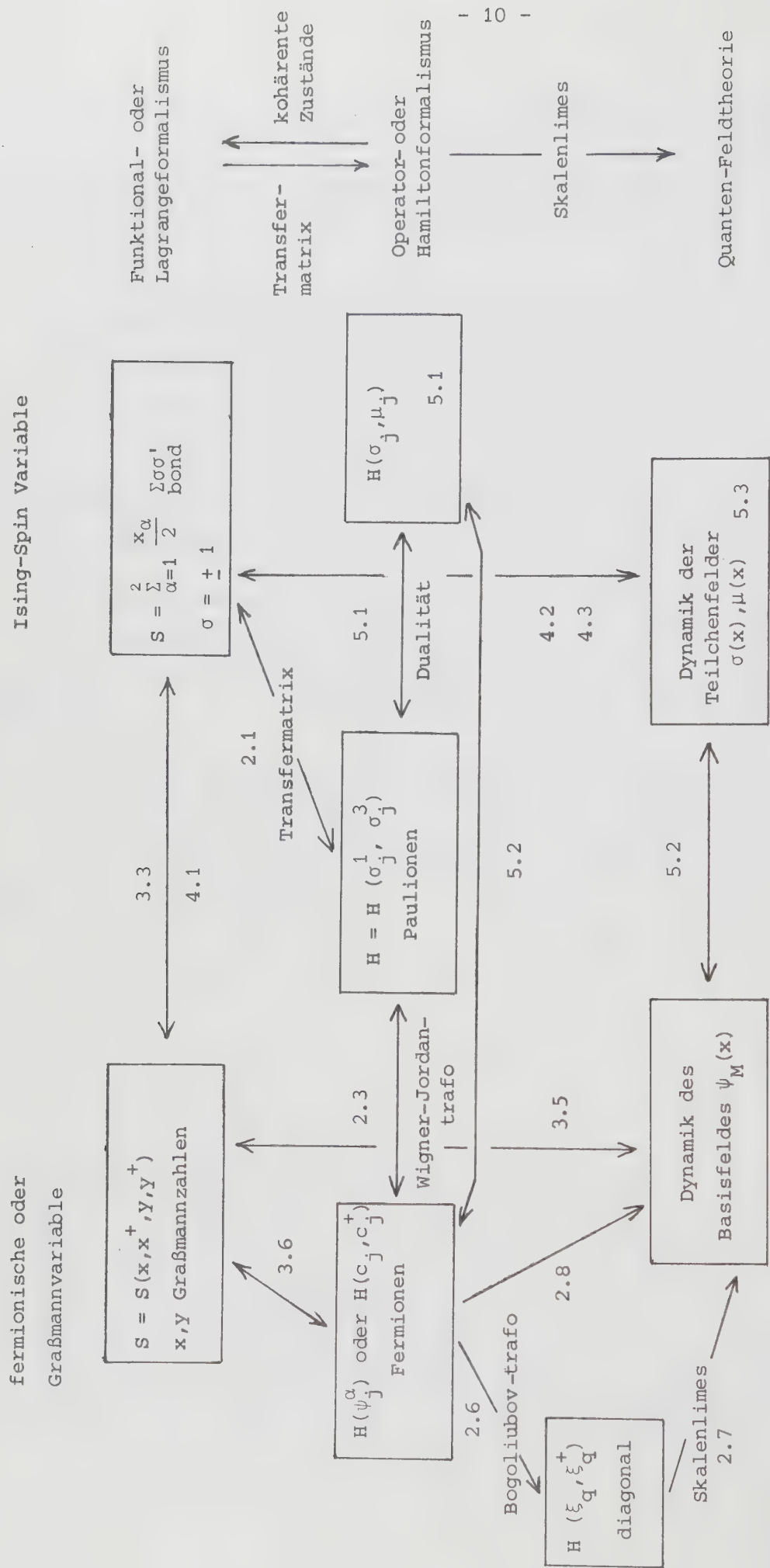


Fig. 1.2 Diagramm zur Gliederung der Arbeit
 Verschiedene Darstellungen des Isingmodells und ihre Beziehungen

2. Kapitel - Ising-Feldtheorie im Operator- bzw. Hamiltonformalismus

1. Das Modell

Eine einfache Theorie, die die im Kap. 1.2 erwähnten Eigenschaften besitzt, ist die Feldtheorie des Isingmodells (IFT), d.h. des Isingmodells in der Nähe der kritischen Temperatur T_c , wo es einen Phasenübergang zweiter Art besitzt. Neben der Bedeutung, die dieses Modell in 2 Dimensionen in der Theorie der Phasenübergänge zweiter Art erlangt hat, gibt es in der Festkörperphysik auch zweidimensionale Monoschichtensysteme, die durch dieses Modell sehr gut beschrieben werden können [32].

In diesem Kapitel soll die Theorie im Hamiltonformalismus entwickelt werden. Dazu wird eine Richtung des Ising-Gitters ausgezeichnet und zur "Zeit" erklärt. Alle Rechnungen werden in euklidischer Formulierung durchgeführt. Um die entsprechenden Ergebnisse im Minkowskiraum zu erhalten, hat man die Wickrotation durchzuführen [56]. Wir benützen die thermodynamischen Eigenschaften dieses Modells in der Nähe der kritischen Temperatur T_c , um daraus eine euklidisch invariante Quantenfeldtheorie (QFT) abzuleiten. Ein d-dimensionales statistisches System im Gleichgewicht wird also eine QFT in einem (d-1) dimensionalen Raum ergeben.

Wir benützen durchweg die Terminologie der statistischen Physik, werden aber öfters auch die feldtheoretischen Ausdrücke verwenden. Um die Zustandssumme (erzeugendes Funktional mit Quelle $\equiv 0$) und die Korrelationsfunktionen (n-Punktfunktionen) der Theorie und damit die Thermodynamik zu definieren, benützen wir eine Wirkung, die über einem d-dimensionalen euklidischen kubischen Gitter mit den Gitterpunkten $\vec{n} = (n_1, n_2, \dots, n_d)$ definiert ist. $n_i \in \mathbb{Z}$. Die dynamische Variable $\sigma_{\vec{n}}$ kann zwei mögliche Werte annehmen, die wir auf ± 1 festlegen. Wir nehmen nur nächste Nachbarwechselwirkung an - die Wirkung ist also so lokal wie möglich und durch

$$S = \sum_{\alpha=1}^d \frac{x_{\alpha}}{2} \sum_{\vec{n}} \sigma_{\vec{n}} \sigma_{\vec{n}+\vec{e}_{\alpha}} \quad (2.1)$$

gegeben.

In verschiedene Richtungen des Raumes seien verschiedene Kopplungen $x_{\alpha} = 2\beta I_{\alpha}$ angenommen, wobei $\beta = \frac{1}{k_B T}$ in die Kopplung absorbiert worden ist.

In Fig. 2.1 sind für den Fall $d = 2$ die Bezeichnungen erläutert.

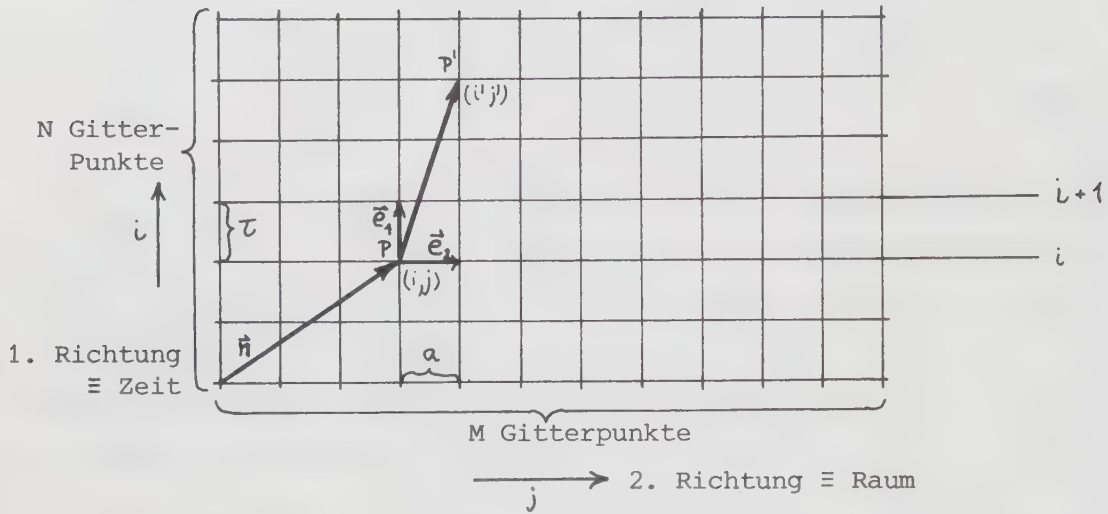


Fig. 2.1: Nomenklatur im 2-dim. Ising-Modell

$$n = (i, j); \quad \vec{N} = (N, M); \quad L = Ma; \quad T = N\tau$$

Die Zustandssumme und Korrelationsfunktionen, die die thermodynamischen Eigenschaften bestimmen, sind

$$Z = \sum_{\{\sigma\}} e^{S(\{\sigma\})} \quad (2.2)$$

$$g_k = \langle \sigma_{\vec{n}_1} \sigma_{\vec{n}_2} \dots \sigma_{\vec{n}_k} \rangle = \frac{1}{Z} \sum_{\{\sigma\}} \sigma_{\vec{n}_1} \sigma_{\vec{n}_2} \dots \sigma_{\vec{n}_k} e^{S(\{\sigma\})} \quad (2.3)$$

$\{\sigma\}$ bedeutet die Wertemenge aller $\sigma_{\vec{n}}$ einer Konfiguration. $\sum_{\{\sigma\}}$ ist also die Konfigurationssumme.

Außerdem müssen noch die Randbedingungen an die Variable σ spezifiziert werden. Wir benützen periodische Randbedingungen für die Wirkung, d.h. wir arbeiten auf einem Torus T^d

$$\sigma_{i+Nk, j+Me, \dots} = \sigma_{i, j, \dots} \quad (2.4)$$

mit $k, l, \dots \in \mathbb{Z}$ and mit $N, M, \dots$ als Zahl der Gitterpunkte in die verschiedenen Richtungen des Gitters.

Im weiteren werden wir uns für das Isingmodell in zwei Dimensionen interessieren, nicht weil der drei- oder vierdimensionale Fall nicht interessant wäre, sondern wegen des desolaten Erkenntniszustandes dieser Theorien in der kritischen Region ($T \approx T_c$).

Für $d = 2$ gilt speziell

$$S = \sum_i^N S_i = \frac{x_1}{2} \sum_{ij}^{NM} \sigma_{ij} \sigma_{i+1,j} + \frac{x_2}{2} \sum_{ij}^{NM} \sigma_{ij} \sigma_{i,j+1} \quad (2.5)$$

mit
$$S_i = \sum_j^M \frac{x_1}{2} \sigma_{ij} \sigma_{i+1,j} + \frac{x_2}{2} \sigma_{ij} \sigma_{i,j+1} \quad (2.6)$$

2. Transfermatrix [33]

Es gibt eine Möglichkeit - es ist genau die von Onsager [11] - die Zustandssumme zu berechnen, die von der Analogie zur Zeitentwicklung eines quantenmechanischen Systems Gebrauch macht. Man zeichnet eine Richtung (Zeit) im Gitter aus und betrachtet eine Konfiguration (Wertemenge der dynamischen Variable σ_{ij}) auf der dazu senkrechten Schicht. In dem betrachteten Modell hat man $2^{M^{d-1}}$ mögliche Konfigurationen in einer Schicht¹⁾. Bezeichnet man eine solche Konfiguration als Zustand, so spannen diese Zustände einen endlich-dimensionalen Hilbertraum auf.

Um von einer Konfiguration zur Zeit i (der Index i bezeichnet die Zeitrichtung) zu einer Konfiguration zur Zeit $i + 1$ zu kommen, benötigen wir eine $2^{M^{d-1}} \times 2^{M^{d-1}}$ Matrix V , die den Zustand zur Zeit i in einen zur Zeit $i + 1$ entwickelt. In der Feldtheorie wird deshalb dieser Operator Zeitentwicklungsoperator genannt. Im Fall $d = 2$ ist der Zustandsraum 2^M dimensional und kann als Produktraum zweidimensionaler komplexer Hilberträume geschrieben werden

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_2^1 \otimes \mathcal{H}_2^2 \otimes \mathcal{H}_2^3 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_2^j \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_2^M \quad (2.7)$$

In jedem dieser 2 dim. Unterräume $\mathcal{H}_2^j$ können wir eine Basis wählen.

1) M ist die Zahl der Gitterpunkte in einer räumlichen Richtung.

$$e_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad e_- = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

$\mathcal{H}$ wird durch die 2^M Basisvektoren

$$e_{\pm}^1 \otimes e_{\pm}^2 \otimes \dots \otimes e_{\pm}^j \otimes \dots \otimes e_{\pm}^M \quad (2.9)$$

aufgespannt.

Die Operatoren, die in diesem Produktraum wirken, sind die Paulimatrizen

$$\sigma_j^\alpha = 1 \otimes 1 \otimes \dots \otimes \sigma^\alpha \otimes \dots \otimes 1 \quad (2.10)$$


 j-te Stelle

Die Darstellung der Zustandssumme durch die Transfermatrix wollen wir für den Fall $d = 1$ zeigen. Der Zustandsraum ist in diesem Fall 2-dimensional. Benützen wir die Basisvektoren von (2.8), so ist σ^1 diagonal, d.h.

$$\sigma^1 e_{\pm} = \pm 1 e_{\pm} \quad (2.11)$$

und die Eigenwerte von σ^1 sind die möglichen Konfigurationen der Spinvariable σ_i .

Die Zustandssumme ist

$$\begin{aligned} Z^{d=1} &= \sum_{\{\sigma\}} \prod_{i=1}^N e^{\frac{\chi}{2} \sigma_i \sigma_{i+1}} = \text{tr} \begin{pmatrix} e^{\frac{\chi}{2}} & e^{-\frac{\chi}{2}} \\ e^{-\frac{\chi}{2}} & e^{\frac{\chi}{2}} \end{pmatrix}^N \\ &= \text{tr} \left(11 e^{\frac{\chi}{2}} + \sigma^1 e^{-\frac{\chi}{2}} \right)^N \end{aligned} \quad (2.12)$$

Jeder einzelne Faktor in dem Produkt unter der Konfigurationssumme wird durch eine Matrixmultiplikation simuliert.

Die Spur tr ist auf die Periodizität des Gitters in Zeitrichtung zurückzuführen.

Die Transfermatrix ist also ($\text{th}(u) = e^{-x}$)

$$V = e^{\frac{x}{2}} \mathbb{1} + e^{-\frac{x}{2}} \sigma^1 = \sqrt{2 \text{sh } x} e^{u \sigma^1} \quad (2.13)$$

Die Zustandssumme kann durch eine Spur über Produkte des Zeitentwicklungsoperators mit dem Hamiltonoperator

$$\tau H = -u \sigma^1 \quad (2.14)$$

geschrieben werden:

$$Z^{d=1} = (2 \text{sh } x)^{\frac{N}{2}} \text{tr} \left(e^{-\tau H} \right)^N \quad (2.15)$$

τ ist der euklidische Zeitschritt von i auf $i + 1$.

Eine Diagonalisierung der Transfermatrix liefert das Spektrum des Hamiltonoperators. Die beiden Eigenwerte sind

$$\lambda_{\pm} = e^{\frac{x}{2}} (1 \pm e^{-x}) \quad (2.16)$$

Die Zustandssumme ist damit

$$Z^{d=1} = \text{tr} \begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix}^N = \lambda_+^N \left(1 + \left(\frac{\lambda_-}{\lambda_+} \right)^N \right) \quad (2.17)$$

Da $\frac{\lambda_-}{\lambda_+} < 1$, gilt für $N \rightarrow \infty$, daß die Zustandssumme durch den größten nicht-entarteten Eigenwert bestimmt ist.

Für den Fall $d = 2$ ergibt sich in analoger Weise [12]

$$Z^{d=2} = \sum_{\{\sigma\}} \prod_{i=1}^N e^{S_i} = \text{tr } V_c^N \quad (2.18)$$

mit $V_c = V_2 V_1$ und $\text{thu}_1 = e^{-x_1}$

$$V_1 = \left(2 \operatorname{sh} x_1\right)^{\frac{M}{2}} e^{-u_1 \sum_j^M \sigma_j^3} \quad (2.19a)$$

$$V_2 = e^{\frac{x_2}{2} \sum_j \sigma_j^1 \sigma_{j+1}^1} \quad (2.19b)$$

V_c ist nun ein Operator, der im Produkt-Hilbertraum (2.7) wirkt.

Bemerkungen:

- 1) Man beachte, daß Z wegen der zyklischen Vertauschung unter der Spur ebenso durch

$$V_a = V_1^{\frac{1}{2}} V_2 V_1^{\frac{1}{2}} \quad (2.20a)$$

wie durch

$$V = V_b = V_2^{\frac{1}{2}} V_1 V_2^{\frac{1}{2}} \quad (2.20b)$$

dargestellt werden kann. Im weiteren werden wir V_b benutzen, da diese Form wegen $[V_2, \sigma^1] = 0$ auch die Darstellung der Korrelationsfunktion durch Spuren über Transfermatrizen erlaubt (siehe Bem. 4)).

- 2) Die Beziehung (2.18) erlaubt die Interpretation der Transfermatrix V als Zeitentwicklungsoperator, falls man den Hilbertraum $\mathcal{H}$ als Zustandsraum eines quantenmechanischen Systems betrachtet, das sich mit imaginärer Zeit entwickelt. Wie im Fall $d = 1$ ist $V = \exp(-\tau H)$, wobei τ der euklidische Zeitschritt von i auf $i + 1$ ist.
- 3) Um H zu erhalten, benötigt man wegen

$$[V_1, V_2] \neq 0 \quad (2.21)$$

die Mehrfachkommutatorreihe der Baker-Campbell-Hausdorff-Formel [34].

Der Hamiltonoperator koppelt damit nicht mehr nur nächste Nachbarn.

- 4) Auch die Korrelationsfunktionen (2.3) lassen sich durch Spuren darstellen.

$$\rho_k = \frac{1}{Z} \text{tr}(\sigma_{i_1 j_1}^1 \sigma_{i_2 j_2}^1 \dots \sigma_{i_k j_k}^1 V^N) \quad (2.22)$$

Wir haben dabei die Heisenbergoperatoren

$$\sigma_{ij}^1 = V^{i-1} \sigma_j^1 V^{-(i-1)} \quad (2.23)$$

benützt. Die Form $\text{tr}(V_2 V_1 \sigma_j^1 V_2 V_1)$ läßt sich wegen $[V_1, \sigma^1] = 0$ und zyklischer Vertauschung unter der Spur zur Form $\text{tr}(V_b \sigma_j^1 V_b)$ transformieren. Aus diesem Grund ist in Korrelationsfunktionen für die Variable σ^1 immer $V_b = V$ zu nehmen.

3. Jordan-Wigner-Transformation [35]

Um die Transfermatrix V zu diagonalisieren, also die Dynamik des Systems möglichst einfach darzustellen, ist es nötig zu neuen Variablen überzugehen.

Diese Transformation ist in der Literatur als Jordan-Wigner-Transformation bekannt und führt als neue Variablen die Fermionen c_m, c_m^+ ein. Es gilt

$$c_m = \mu_m \sigma_m^- \quad (2.24a)$$

$$c_m^+ = \mu_m \sigma_m^+ \quad (2.24b)$$

mit
$$\sigma_j^\pm = \frac{1}{2} (\sigma_j^1 \pm i \sigma_j^2) \quad (2.25)$$

$$\mu_j = \prod_{i=1}^{j-1} (-\sigma_i^3) = e^{i\pi \sum_{i=1}^{j-1} \sigma_i^+ \sigma_i^-} \quad (2.26)$$

Bezüglich der ursprünglichen Freiheitsgrade σ_j ist der "String"-Operator

μ_j nichtlokal, d.h. zur Definition von μ_j sind alle σ_i^3 links der Stelle j zu multiplizieren. Für die Fermionen c_j, c_j^+ ergeben sich die Antivertauschungsrelationen:

$$\{c_j, c_i^+\} = \delta_{ij}, \quad \{c_j, c_i\} = \{c_j^+, c_i^+\} = 0 \quad (2.27)$$

Einfache Algebra ergibt

$$\sigma_j^+ \sigma_j^- = \frac{1}{2} (1 + \sigma_j^3) = c_j^+ c_j \quad (2.28a)$$

$$\sigma_j^+ \sigma_{j+1}^+ = (c_j^+ - c_j)(c_{j+1}^+ + c_{j+1}) \quad (2.28b)$$

Die in den σ quadratischen Ausdrücke an der selben Stelle (oder nächste Nachbarn) sind wieder lokal in den neuen Variablen. Die Beziehung (2.28) erlaubt es, die Transfermatrix (2.19) umzuschreiben auf die folgende Form

$$V_1 = (2 \operatorname{sh} x_1)^{\frac{M}{2}} e^{-2u_1 \sum_j^M (c_j^+ c_j - \frac{1}{2})} \quad (2.29a)$$

$$V_2 = e^{\frac{x_2}{2} \sum_j^{M-1} (c_j^+ - c_j)(c_{j+1}^+ + c_{j+1}) - \frac{x_2}{2} (c_M^+ - c_M)(c_1^+ + c_1)(-)^{\hat{N}}} \quad (2.29b)$$

Die periodischen Randbedingungen für die σ -Variable $\sigma_1^\alpha \equiv \sigma_{M+1}^\alpha$ erfordern eine genauere Diskussion in den neuen Freiheitsgraden.

$$c_{M+1} = \mu_{M+1} \sigma_{M+1}^- = \mu_{M+1} \sigma_1^- = \mu_{M+1} \mu_1 \sigma_1^- \quad (2.30)$$

da $\mu_1 = 1$. Wir haben also die Randbedingungen für die Fermionen

$$\begin{aligned} c_{M+1} &= (-)^{\hat{N}} c_1 \\ c_{M+1}^+ &= (-)^{\hat{N}} c_1^+ \end{aligned} \quad (2.31)$$

Der Fermionzahloperator $\hat{N} = \sum_{i=1}^M c_i^+ c_i$, der in diesen Randbedingungen erscheint, ist ein globaler Operator, hängt also nicht nur von den Randwerten c_1, c_M, c_{M+1} ab. $(-)^{\hat{N}}$ klassifiziert die Zustände nach gerader und ungerader Teilchenzahl (Teilchen-Parität). Die üblichen Randbedingungen der Variable σ , in der nur die Eigenschaften des Zustands am Rand eine Rolle spielen,

äußern sich nun in einer globalen Bedingung (2.31), in der die Teilchen-Parität des Zustands, also eine globale Größe eingeht.

Abhängig davon, ob der Zustand eine gerade oder ungerade Zahl von Fermionen enthält, haben wir antizyklische oder zyklische Randbedingungen zu wählen.

Führen wir die Projektoren auf den geraden und ungeraden Fermionenzahlraum ein,

$$Q^{\pm} = \frac{1 \pm (-)^{\hat{N}}}{2} \quad (2.32)$$

so ergibt sich die Transfermatrix

$$V = V^{+}Q^{+} + V^{-}Q^{-} \quad (2.33)$$

Wir bezeichnen mit V^{+} (V^{-}) die Transfermatrix mit antiperiodischen (periodischen) Randbedingungen für die c, c^{+} in räumlicher Richtung. Die additive Zusammensetzung (2.33) läßt sich in Worten so formulieren:

Um das Eigenwertspektrum der Transfermatrix V zu berechnen, nehme man die Eigenzustände von V^{+} (sie sind auch Eigenzustände von $(-)^{\hat{N}}$), die gerade Anzahl von "c-Teilchen" enthalten - die zu ungerader Anzahl von c-Teilchen gehörigen Eigenzustände streiche man - und dazu die von V^{-} , die ungerade Anzahl enthalten. Von den 2^M Eigenzuständen werden also, je zur Hälfte, die von V^{+} und V^{-} genommen.

Das Spektrum von V^{+} und V^{-} wird in Abschnitt 6 berechnet, d.h. es werden die Eigenwerte $\Lambda_i^{\pm}$ von

$$V^{\pm} |\psi_i^{\pm}\rangle = \Lambda_i^{\pm} |\psi_i^{\pm}\rangle \quad (2.34)$$

berechnet.

Hier soll in den nächsten Abschnitten die Dynamik der Fermionen c_j, c_j^{+} untersucht werden.

4. Bewegungsgleichung der Fermionen

Die Dynamik der Variablen c_j wird durch $V c_j V^{-1}$ bestimmt. Wie in Anhang A näher ausgeführt, ergibt sich mit $V = V_a$

$$V c_j V^{-1} = e^{2u_1} \operatorname{ch} x_2 c_j + \frac{\operatorname{sh} x_2}{2} \{ (c_{j-1}^+ - c_{j+1}^+) - e^{2u_1} (c_{j-1} + c_{j+1}) \} \quad (2.35a)$$

$$V c_j^+ V^{-1} = e^{-2u_1} \operatorname{ch} x_2 c_j^+ + \frac{\operatorname{sh} x_2}{2} \{ e^{-2u_1} (c_{j-1}^+ + c_{j+1}^+) - (c_{j-1} - c_{j+1}) \} \quad (2.35b)$$

Man beachte, daß die zu V gehörige Zeitentwicklung wegen der euklidischen Zeit nicht unitär ist. Der Hamiltonoperator zur Transfermatrix V hat eine nichtlokale Struktur. Aus diesem Grund ist es eine bemerkenswerte Tatsache, daß die Feldgleichungen nur nächste Nachbarn koppeln.

Wir untersuchen nun die Dynamik der hermiteschen Komponenten von c

$$\begin{aligned} \psi_j^1 &= c_j^+ + c_j \\ \psi_j^2 &= -i (c_j^+ - c_j) \end{aligned} \quad (2.36)$$

Die Änderung um einen euklidischen Zeitschritt von i nach $i + 1$, d.h. um $\Delta t = \tau$, ist

$$\delta_\tau \psi_j^\alpha := \frac{V \psi_j V^{-1} - \psi_j}{\tau} \quad (2.37)$$

Die räumliche Ableitung sei

$$\delta_a \psi_j^\alpha := \frac{\psi_j - \psi_{j-1}}{a} \approx \frac{\psi_{j+1} - \psi_j}{a} \quad (2.38)$$

mit der räumlichen Gitterlänge a .

Mit diesen Abkürzungen ergibt sich aus (2.35) oder (A.15)

$$\delta_\tau \psi_j = \frac{\operatorname{ch}(x_2 - 2u_1) - 1}{\tau} \psi_j + \frac{\operatorname{sh}(x_2 - 2u_1)}{\tau} \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \psi_j - \frac{a \operatorname{sh} x_2}{\tau} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \delta_a \psi_j \quad (2.39)$$

Um den Übergang zu einer relativistisch kovarianten Gleichung vorzubereiten, führen wir folgende 2×2 Matrizen ein:

$$\begin{aligned} \gamma^0 &= \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \\ \{ \gamma^0, \gamma^1 \} &= 0 \quad ; \quad (\gamma^0)^2 = 1 \quad (\gamma^1)^2 = -1 \end{aligned} \quad (2.40)$$

Mit den Wick-rotierten Koordinatendifferentialen $a = dx^1$ und $i\tau = dx^0$, sowie $\frac{\partial}{\partial x^i} = \partial_i$ gilt

$$i\left(\gamma^0 \partial_0 + \frac{dx^1}{dx^0} \operatorname{sh} x_2 \gamma^1 \partial_1\right) \psi_j - \frac{\operatorname{sh}(x_2 - 2u_1)}{\tau} \psi_j = \frac{\operatorname{ch}(x_2 - 2u_1) - 1}{\tau} \gamma^0 \psi_j \quad (2.41)$$

Wir werden im nächsten Abschnitt sehen, daß im Skalenlimes der Term auf der rechten Seite der Gleichung (2.41) verschwindet. Falls die Asymmetrie der beiden Richtungen im Gitter $\frac{dx^1}{dx^0}$ gleich $1/\operatorname{sh} x_2$ gesetzt wird, ergibt sich also eine kovariante Gleichung, nämlich eine Dirac-Gleichung mit der Masse $\frac{\operatorname{sh}(x_2 - 2u_1)}{\tau}$. Benützt man statt V_a die Transfermatrix V_b , so ergibt sich die selbe Gleichung (2.41), wobei der Term $\operatorname{sh} x_2$ ersetzt wird durch

$$-\operatorname{sh} 2u_1 + \operatorname{sh}(2u_1 - x_2) \quad (2.41a)$$

5. Skalenlimes der Bewegungsgleichungen

Wir wollen das Isingmodell in einem Grenzfall untersuchen, in dem sich eine nichttriviale Feldtheorie ergibt.

Das Isingmodell besitzt zwei Phasen, eine geordnete mit spontaner Magnetisierung $\langle \sigma \rangle \neq 0$ und eine ungeordnete Phase, die durch die kritische Temperatur $T = T_c$ getrennt sind. Die kritische Temperatur des Phasenübergangs ergibt sich als singuläre Stelle der Zustandssumme und ist [59] definiert durch:

$$\operatorname{sh} x_{1c} \operatorname{sh} x_{2c} = \operatorname{th} \frac{x_{2c}}{2} e^{x_{1c}} = 1 \quad (2.42)$$

mit $x_{1c} = \frac{2J_1}{T_c}$; $x_{2c} = \frac{2J_2}{T_c}$. Der Index c steht für die Werte am kritischen Punkt.

In der Kopplungskonstantenebene x_1, x_2 ergibt (2.42) eine kritische Linie. Dieses Phasendiagramm ist in Fig. 2.2 dargestellt.

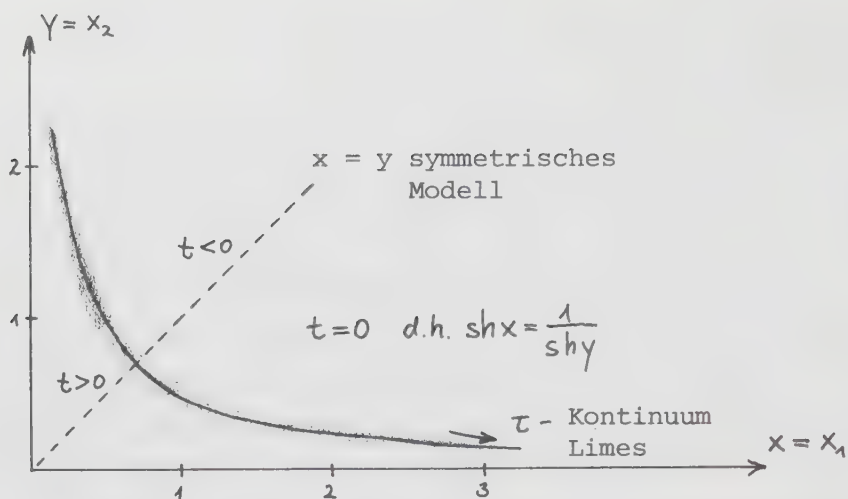


Fig. 2.2: Phasendiagramm des 2-dim. Isingmodells.

$$t = 0 \text{ ist } T = T_c \text{ oder } \text{sh} x_{1c} \text{sh} x_{2c} = 1$$

Messen wir die Energien und Längen in Einheiten von T_c bzw. $\frac{1}{T_c}$ und führen wir den dimensionslosen Entwicklungsparameter

$$t = \frac{T - T_c}{T_c} \quad (2.43)$$

ein, so ergibt sich für die Kopplungen in der Nähe der kritischen Temperatur ($|t| \ll 1$)

$$x_1 = \frac{x_{1c}}{1+t} \approx x_{1c}(1-t) \quad (2.44a)$$

$$x_2 = \frac{x_{2c}}{1+t} \approx x_{2c}(1-t) \quad (2.44b)$$

Im Anhang B sind die Formeln, die für die Entwicklung nach t wichtig sind, zusammengefaßt.

Folgende zwei Grenzprozesse werden simultan durchgeführt:

- 1) $T \rightarrow T_c$, d.h. die Temperatur soll sich dem kritischen Wert nähern. Es werden also die Korrelationslängen in Einheiten der Gitterlänge a gegen unendlich gehen (Korrelationslänge ist durch das Verhalten der Zweipunktfunktion für große Abstände gegeben).

$$\langle \sigma_z \sigma_z \rangle \xrightarrow{|\vec{r}| \rightarrow \infty} e^{-\frac{|\vec{r}|}{\xi(\tau)}} \quad (2.45)$$

Der "Massengap", das ist die Differenz des niedrigsten und zweitniedrigsten Eigenwertes des Hamiltonoperators, wird gegen Null gehen.

- 2) $a \rightarrow 0$ und $\tau \rightarrow 0$, d.h. die Gitterkonstanten sollen gegen Null gehen. Da das durch das Gitter überdeckte Volumen $TL = a\tau MN$ konstant gehalten werden soll, ist auch ein thermodynamischer Limes, nämlich $N, M \rightarrow \infty$ damit verbunden.

Dieser kombinierte Limes wird als Skalen- oder Kontinuumlimes des statistischen Systems bezeichnet. Im allgemeinen ist mit diesem Limes auch eine Umskalierung der Feldvariable verbunden. Man beachte, daß dieser Grenzwert nur möglich ist, wenn es mindestens eine Temperatur T_c gibt, wo das System makroskopische Fluktuationen erleidet, das System also zu "brodeln" anfängt.

Diese makroskopischen Phänomene (makroskopisch im Vergleich zur Gitterlänge a) sind es, die in diesem Limes überleben.

Alle Phänomene, die endliche Reichweiten in Einheiten von a haben, werden in diesem Limes aussterben, da $a \rightarrow 0$ geht. Zusätzlich zu den beiden Grenzwerten muß noch eine Beziehung zwischen den "kleinen" Größen t und a (bzw. τ) gegeben sein,

$$a = f(t), \quad \tau = g(t) \quad (2.46)$$

der beide Grenzwerte korreliert.

Um die Korrelationslänge oder den "Massengap" festzuhalten, also das Spektrum von H nicht zur Null schrumpfen oder ins Unendliche entweichen zu lassen, sind wir gezwungen

$$\tau \propto |t| \left[\frac{1}{T_c} \right] \quad (2.47)$$

zu setzen (da "Gap" $\propto \frac{t}{\tau}$, wie später klar wird).

Um im Skalenlimes die Lichtgeschwindigkeit $c = 1$ zu gewährleisten, setzen wir $\frac{a \cdot \hbar v_{2c}}{\tau} = 1$, d.h. wir wählen

$$\tau = \text{sh } x_{2c} \, a = k \, a \quad (2.48)$$

Damit wird der euklidische Abstand (siehe Fig. 2.1)

$$\begin{aligned} r &= \left([(i' - i) \tau]^2 + [(j' - j) a]^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= |t| \sqrt{(\Delta i)^2 k^2 + (\Delta j)^2} \end{aligned} \quad (2.49)$$

eine endliche Größe.

Die Proportionalitätskonstante in (2.47) kann beliebig gewählt werden und gibt verschiedene Werte für den "Massengap", also für die im Skalenlimites entstehende Energieskala. Eine Entwicklung des Massenterms in (2.41) um t ergibt (siehe Anhang B)

$$m = \frac{\text{sh}(x_2 - 2u_1)}{\tau} = - \frac{k \mu t}{\tau} [T_c] \quad (2.50)$$

mit
$$k = \text{sh } x_{2c} = \frac{2\sqrt{\alpha}}{1 - \alpha} \quad , \quad \alpha = e^{-2x_{1c}} \quad (2.51)$$

$$\mu = x_{1c} + x_{2c} \text{sh } x_{1c} > 0 \quad (2.52)$$

Durch die Wahl $\tau = k|t|$ bzw. $a = |t|$ ist also gewährleistet, daß der "Massengap" endlich bleibt.

$$|m| = \mu \neq 0 \quad (2.53)$$

Auch für verschiedene Werte von α , die die Kurve des Phasenübergangs in Fig. 2.2 parametrisiert, ergeben sich verschiedene Werte für den "Gap" μ . In Fig. 2.3 ist dieser Zusammenhang graphisch wiedergegeben.

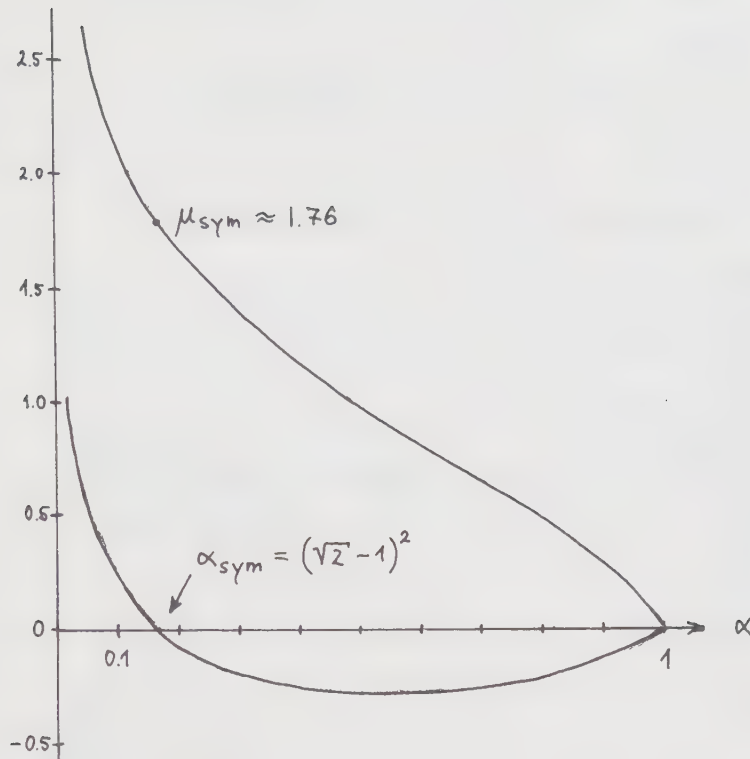


Fig.2.3: Die Massenparameter μ und μ' über $\alpha = e^{-2x_1c}$
 $\mu = x_{1c} + \frac{x_{2c}}{\text{sh}x_{2c}}$; $\mu' = x_{1c} - \frac{x_{2c}}{\text{sh}x_{2c}}$.

Da sich für $|t| \ll 1$

$$\frac{\text{ch}(x_2 - 2u_1) - 1}{\tau} \sim \sigma(t) \quad (2.54)$$

ergibt, erkennen wir nun in der Gleichung (2.41) folgenden Grenzwert

$$(i\rlap{\not{D}} \pm \mu) \psi(x) = 0 \quad \begin{array}{l} t > 0 \\ t < 0 \end{array} \quad (2.55)$$

$\rlap{\not{D}}$ bedeutet $\gamma^0 \partial_0 + \gamma^1 \partial_1$.

Der Skalenlimes führt also für den kontinuierlichen Quantenfeldoperator $\psi(x)$ zu einer Dirac-Gleichung.

Bemerkungen:

- 1) Der Wert der Masse μ (in Einheiten von T_c) ist die einzige Konstante, die angepaßt werden kann. Ist

die mikroskopische Energieskala (beliebiges T_C) gegeben, so kann durch

- a) Wahl der Proportionalitätskonstante zwischen τ und $|t|$ und
- b) Wahl des Asymmetrieparameters k , der den Phasenübergang parametrisiert,

die Energieskala der feldtheoretischen Phänomene ($\equiv$ Gap) gewählt werden.

Da die Ising-Theorie vollständig durch die dimensionslosen Kopplungen x_1 und x_2 bestimmt ist und erst durch den Skalenlimes eine Energieskala ausgezeichnet wird ($a = a[\frac{1}{T_C}]$), kann man hier von dimensionaler Transmutation sprechen [5,10]. Ist μ an die phänomenologische Massenskala angepaßt, z.B. an die Elektronenmasse, so sind alle weiteren Konstanten der Feldtheorie bestimmt, so z.B. die Wechselwirkungskonstanten zwischen verschiedenen Feldern oder die Massenverhältnisse.

- 2) Für den speziellen Wert des Asymmetrieparameters $k = 1$ ergibt sich die selbe Gitterlänge in Raum und Zeitrichtung ($a = \tau$). In diesem symmetrischen Skalenlimes ist für $a = |t| [\frac{1}{T_C}]$ die Masse $\mu_{\text{sym}} = 1.76 [T_C]$; T_C ist durch $\text{sh } x_C = 1$ mit $J_1 = J_2 = J$ verbunden ($x_C = \frac{J}{k_B T_C}$).
- 3) Betrachten wir die Folge aller Modelle, die durch die Gitterlänge a parametrisiert werden, so kann man das Verhalten all dieser Modelle am kritischen Punkt durch Kopplungen beschreiben, die von dieser Gitterlänge abhängen.

Im eben beschriebenen Fall sind diese Modelle durch zwei Kopplungen gegeben

$$\begin{aligned} t(a) &= a \\ k(a) &= \text{const} \quad (\text{siehe 2.51}) \end{aligned} \tag{2.56}$$

Das läßt sich auf die Kopplungen $x_1(t)$ und $x_2(t)$ nach (2.44) übertragen:

$$x_1(a) = \frac{x_{1c}}{1+a}$$

(2.57)

$$x_2(a) = \frac{x_{2c}}{1+a}$$

Für den symmetrischen Fall $x_1 = x_2$ ist in Fig. 2.4 diese von der Dichte des Rasters a abhängige Kopplung dargestellt. Diese Abhängigkeit der Kopplungen vom Gitter-"Cutoff" $\frac{1}{a}$ ist in einer Feldtheorie mit der Abhängigkeit nackter Kopplungen vom Cutoff-Parameter Λ zu vergleichen.

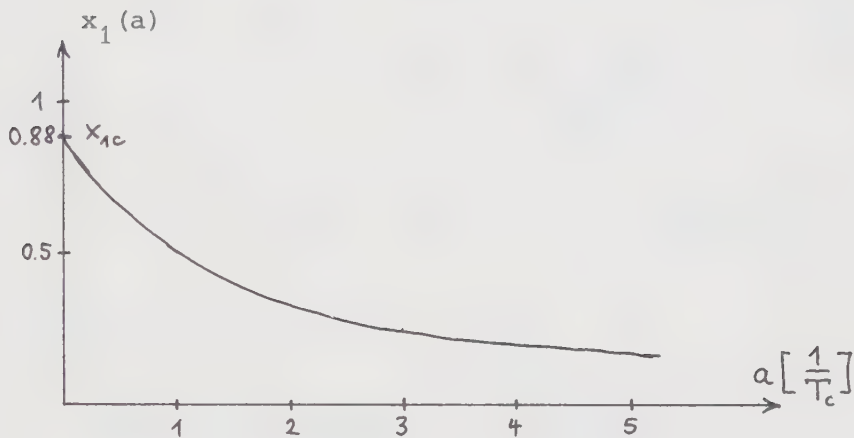


Fig. 2.4: Kopplung x_1 für $k = 1$ in Abhängigkeit von der Gitterlänge a

- 4) Eine von unserem Kontinuumlimes abweichende Art ist der asymmetrische τ -Kontinuumlimes [36,37]

$$x_1(\tau) = -\ln \tanh \tau$$

(2.58)

$$x_2(\tau) = 2 \lambda(\tau) \tau$$

Für kleine τ ($\tau \ll 1[\frac{1}{T_C}]$) gilt $\text{sh} x_1 \sim \frac{1}{2\tau}$. Am kritischen Punkt ist also $\lambda = 1$, da $\text{sh} x_{1c} \text{sh} x_{sc} = 1$. Im Phasendiagramm Fig. 2.2 ist dieser Bereich rechts unten zu finden. Die Masse verschwindet:

$$m = \frac{\hbar(x_2 - 2u_1)}{\tau} = 2(\lambda(\tau) - 1) \rightarrow 0 \quad (2.59)$$

Damit ist eine Quantentheorie (kontinuierliche Zeit) einer Kette von diskreten Paulionen definiert. Der räumliche Kontinuuumslimes kann nicht mehr durchgeführt werden, oder genauer ($q = pa$, siehe (2.74))

$$\varepsilon_p = 2\sqrt{(\lambda - 1)^2 + a^2 p^2} \xrightarrow{a \rightarrow 0} 0 \quad (2.60)$$

d.h. das Spektrum wird trivial.

Man kann ein endliches Spektrum erreichen, falls man die Lichtgeschwindigkeit mitskaliert. Mit $c = 2a$ ist

$$\varepsilon_p = \sqrt{\frac{(\lambda - 1)^2}{4a^4} c^4 + p^2 c^2} \quad (2.61)$$

Die mit dieser gleitenden Lichtgeschwindigkeit berechnete Masse ist

$$\tilde{m} = \frac{\lambda(\tau) - 1}{2a^2} \quad (2.62)$$

Da wir die Lichtgeschwindigkeit als Konstante behandeln wollen, werden wir im folgenden immer den Skalenlimes durchführen und auf den τ -Kontinuuumslimes trotz der Vorzeichen, die er bei der Definition eines Hamiltonoperators (lokal) hat, verzichten.

6. Diagonalisierung der Transfermatrix [12]

Wie aus der Form (2.29) der Transfermatrix ersichtlich ist, enthält der Hamiltonoperator " $c^+ c^+$ " und " cc " Terme. Das störungstheoretische Vakuum $|0\rangle$, definiert durch $c_j |0\rangle = 0$, ist deshalb nicht stabil. Eine Diagonalisierung solcher Terme ist von der BCS-Theorie der Supraleitung bekannt [28],

und erfolgt mittels Fouriertransformation und Bogoliubov-Valatin-Rotation [38]. Da die Transfermatrix im Fermionraum sowohl durch zyklische als auch durch antizyklische Randbedingungen beschrieben wird (siehe (2.33)), wollen wir beide Fälle parallel behandeln.

Die Fourierdarstellung der Fermioperatoren c_m, c_m^+ ist

$$\begin{aligned} c_m &= \frac{1}{\sqrt{M}} e^{-i\frac{\pi}{4}} \sum_q e^{iqm} \eta_q & m = -r, -r+1, \dots, r-1 \\ c_m^+ &= \frac{1}{\sqrt{M}} e^{i\frac{\pi}{4}} \sum_q e^{-iqm} \eta_q^+ & 2r = M \end{aligned} \quad (2.63)$$

Der Faktor $e^{i\frac{\pi}{4}}$ ist aus rechentechnischen Gründen eingeführt. Die Randbedingungen an die Fermionen c_m übertragen sich auf verschiedene Summationen über q , d.h.

$$\text{für } c_r = -c_{-r} \text{ bzw. } c_r^+ = -c_{-r}^+ \quad \text{gilt } q = \ell = \pm \frac{\pi}{M}, \pm \frac{3\pi}{M}, \dots, \pm \frac{(M-1)\pi}{M} \quad (2.64a)$$

$$\text{für } c_r = c_{-r} \text{ bzw. } c_r^+ = c_{-r}^+ \quad \text{gilt } q = k = 0, \pm \frac{2\pi}{M}, \pm \frac{4\pi}{M}, \dots, \pi \quad (2.64b)$$

Die Vertauschungsrelationen sind

$$\{\eta_q, \eta_{q'}\} = \{\eta_q^+, \eta_{q'}^+\} = 0 \quad \{\eta_q, \eta_{q'}^+\} = \delta_{qq'} \quad (2.65)$$

Um V^+ (bzw. V^-) zu diagonalisieren, ist es vorteilhaft, die Summation (2.64a) (bzw. (2.64b)) zu verwenden.

Die beiden Sektoren sind durch die verschiedenen Bezeichnungen für die Impulse $q = \ell, k$ zu unterscheiden. Es gilt

a) antiperiodische Randbedingungen (gerade Teilchenzahl)
gekennzeichnet durch + oder $q = \ell$

b) periodische Randbedingungen (ungerade Teilchenzahl)
gekennzeichnet durch - oder $q = k \in \text{Nullmode}$.

Die nichtdiagonalen Terme, " $\eta^+ \eta^+$ " und " $\eta \eta$ " in den Faktoren der Transfermatrix

$$V_1 = (2 \operatorname{sh} x_1)^{\frac{M}{2}} e^{-2u_1 \sum_q (\eta_q^+ \eta_q - \frac{1}{2})} \quad (2.66a)$$

$$V_2 = e^{x_2 \sum_{q>0} \cos q (\eta_q^+ \eta_q + \eta_{-q}^+ \eta_{-q}) + \sin q (\eta_{-q}^+ \eta_q^+ + \eta_q \eta_{-q})} \quad (2.66b)$$

sind durch eine impulsabhängige sogenannte Bogoliubov-Valatin-Transformation zu eliminieren. Wir führen die neuen Koordinaten ξ_q, ξ_q^+ ein:

$$\xi_q^+ = \cos \Phi_q \eta_q^+ + \sin \Phi_q \eta_{-q} \quad (2.67a)$$

$$\xi_q = \cos \Phi_q \eta_q + \sin \Phi_q \eta_{-q}^+ \quad (2.67b)$$

Sie läßt die Vertauschungsrelation (2.65) invariant

$$\{\xi_q, \xi_{q'}\} = \{\xi_q^+, \xi_{q'}^+\} = 0 \quad \{\xi_q, \xi_{q'}^+\} = \delta_{qq'} \quad (2.68)$$

Wählt man den impulsabhängigen Rotationswinkel ϕ_q

$$e^{-2i\phi_q} = \Theta(e^{iq}) \quad (2.69)$$

mit
$$\Theta(z) = z^{\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}} \sqrt{\frac{(z - \frac{1}{\alpha_1})(z - \alpha_2)}{(z - \alpha_1)(z - \frac{1}{\alpha_2})}} \quad (2.70a)$$

und
$$\alpha_1 = e^{-x_1} \operatorname{th} \frac{x_2}{2}, \quad \alpha_2 = \frac{e^{-x_1}}{\operatorname{th} \frac{x_2}{2}} \quad (2.70b)$$

so ergibt sich eine diagonale Transfermatrix. Der eben angegebene Rotationswinkel gilt für die Diagonalisierung von $V_b = V$.

In der Wurzel von (2.70a) hat man den Zweig zu wählen, der für $q \rightarrow 0$ die Bedingung $\sin 2\phi_q \rightarrow 0$ erfüllt. Es ist $\sin \phi_q = -\sin \phi_{-q}$. Im Grenzfall kleiner q gilt

$$\cos 2\phi_q = \begin{cases} +1 \\ -1 \end{cases} \quad \text{d.h.} \quad \Phi_q = \begin{cases} 0 \\ \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad \text{für} \quad \begin{cases} t > 0 \\ t < 0 \end{cases} \quad (2.71)$$

Wir haben also, je nachdem die Temperatur T größer oder kleiner der kritischen Temperatur T_c ist, verschiedene Bogoliubov-Valatin-Rotationen durchzuführen.

Man verifiziert leicht, daß der Winkel (2.69) folgende Transfermatrix ergibt.

$$V^\pm = (2 \operatorname{sh} x_1)^{\frac{M}{2}} e^{-\sum_{q=\ell}^M \varepsilon_q \left(\xi_q^\pm \xi_q - \frac{1}{2} \right)} \quad (2.72)$$

Die Energien ε_q sind positive Lösungen der Gleichung

$$\operatorname{ch} \varepsilon_q = \operatorname{ch} x_2 \operatorname{ch} 2u_1 - \operatorname{sh} x_2 \operatorname{sh} 2u_1 \cos q \quad (2.73)$$

$$= \operatorname{ch}(x_2 - 2u_1) + 2 \operatorname{sh} x_2 \operatorname{sh} 2u_1 \sin^2 \frac{q}{2} \quad (2.74)$$

Für die Transfermatrix V_a hat man einen anderen Winkel zu wählen; die Energien aber sind dieselben wie in (2.73) angegeben. Für die Fälle $k = 0, \pi$ (periodische Randbedingungen) gilt anstatt (2.73)

$$\varepsilon_{k=0} = 2u_1 - x_2 \quad \text{und} \quad \Phi_{k=0} = 0 \quad (2.74a)$$

$$\varepsilon_{k=\pi} = 2u_1 + x_2 \quad \text{und} \quad \Phi_{k=\pi} = 0 \quad (2.74b)$$

In der Ableitung von (2.72) wurde $\sum_q \cos q = 0$ benutzt. Da die Bogoliubov-Valatin-Rotation die Teilchen-Parität $(-)^{\hat{N}}$ der Zustände nicht ändern, können die Eigenzustände von V^+ (bzw. V^-) durch eine gerade (bzw. ungerade) Anzahl von ξ -Teilchen erzeugt werden. So sind die Eigenvektoren von V^+

$$|0\rangle^\ell, \quad \xi_q^+ \xi_{q'}^+ |0\rangle^\ell, \quad \xi_q^+ \xi_{q'}^+ \xi_{q''}^+ \xi_{q'''}^+ |0\rangle^\ell, \dots \quad q, q', \dots \quad \text{beliebig} \quad (2.75)$$

Das Vakuum $|0\rangle^\ell$ ist durch $\xi_q |0\rangle^\ell = 0$ für alle $q = \ell$ gegeben. Der größte Eigenwert der Transfermatrix V^+ , bzw. der niedrigste Eigenwert des Hamiltonoperators ist gegeben durch:

$$V^+ |0\rangle^\ell = (2 \operatorname{sh} x_1)^{\frac{M}{2}} e^{\frac{1}{2} \sum_\ell \varepsilon_\ell} |0\rangle^\ell \quad (2.76)$$

Von den Eigenvektoren von V^- sind folgende mit den periodischen Randbedingungen verträglich

$$\xi_q^+ |0\rangle^k, \quad \xi_q^+ \xi_{q'}^+ \xi_{q''}^+ |0\rangle^k, \quad \dots \quad q, q', \dots \text{beliebig}$$

mit dem Vakuum $|0\rangle^k$ durch $\xi_q |0\rangle^k = 0$ für alle $q = k$ gegeben. Der größte Eigenwert von V^- zum Eigenvektor $\xi_{q=0}^+ |0\rangle^k$ ist gegeben durch

$$V^- \xi_{k=0}^+ |0\rangle^k = \left(2 \operatorname{sh} x_1\right)^{\frac{M}{2}} e^{\frac{1}{2} \left(\sum_{k \neq 0} \varepsilon_k - \varepsilon_0 \right)} \xi_{k=0}^+ |0\rangle^k \quad (2.77)$$

Der Vergleich der beiden niedrigsten Energie-Eigenwerte aus (2.76) und (2.77) ergibt (man beachte: $V = e^{-TH}$)

$$\Delta E = -\frac{1}{T} \ln \frac{\Lambda_{k=0}^-}{\Lambda_0^+} = -\frac{1}{2T} \left\{ \sum_{k \neq 0} \varepsilon_k - \varepsilon_0 - \sum_l \varepsilon_l \right\} \quad (2.78)$$

Im thermodynamischen Limes $M \rightarrow \infty$ ist [61]

$$\left| \sum_k |\varepsilon_k| - \sum_l |\varepsilon_l| \right| \sim \sigma(e^{-M}) \quad (2.79)$$

Damit wird

$$\Delta E = \frac{|\varepsilon_0| + \varepsilon_0}{2T} + \sigma(e^{-M}) \quad (2.80)$$

Für $T > T_c$ ist $\varepsilon_0 > 0$ und die Energielücke ist

$$(\Delta E)_{T > T_c} = \frac{\varepsilon_0}{T} \xrightarrow[\text{Skalenlimes}]{|t| \ll 1} \text{Masse } m \quad (2.81)$$

Für $T < T_c$ ist $\varepsilon_0 < 0$ und damit ergibt sich im thermodynamischen Limes eine zweifache Entartung des Grundzustandes.

$$(\Delta E)_{T < T_c} \sim \sigma(e^{-M}) \quad (2.82)$$

Die Energien zu $|0\rangle^k$ und $\xi_{k=0}^+ |0\rangle^k$ sind entartet.

7. Skalenlimes des Hamiltonoperators im Impulsraum

In diesem Abschnitt wird der Skalenlimes im Hamiltonoperator, der eben in den Komponenten ξ_q, ξ_q^+ diagonalisiert wurde, direkt durchgeführt.

Aus der Form (2.72) der Transfermatrix liest man die Form des Hamiltonoperators ab ($V^\pm = e^{-\tau H^\pm}$).

Es sei hier nochmals daran erinnert, daß der Hamiltonoperator nur in den beiden Paritäts-Sektoren diagonalisiert werden konnte. Wir betrachten hier also nur H^+ und H^- , nicht H_{exakt} , der durch $V = e^{-\tau H_{\text{exakt}}}$ definiert ist.

$$H^\pm = \frac{1}{\tau} \sum_{q=\frac{\ell}{k}} \epsilon_q \left(\xi_q^+ \xi_q - \frac{1}{2} \right) \quad (2.83)$$

Die Einteilchenenergien $\frac{\epsilon_q}{\tau}$ können für den Fall $|t| \ll 1$ und $q = p|t| \ll 1$, also für kleine Impulse im Skalenlimes berechnet werden. $q = p|t|$ ist das Impulsraumanalog zu $j = \frac{x^1}{|t|}$; x^1 und p sind die endlichen skalierten Orte und Impulse, die j und q sind die entsprechenden Gittergrößen. Damit ist

$$\sin^2 \frac{q}{2} = \frac{p^2 t^2}{4} + O(q^4) \quad (2.84)$$

Aus (B9,12,15) liest man ab, daß

$$\text{sh } x_2 \text{ sh } 2u_1 = k^2 (1 + O(t)) \quad (2.85)$$

$$2u_1 - x_2 = k\mu t \quad (2.86)$$

gilt. Mit der Form (2.74) der Teilchenenergien ergibt sich

$$\text{ch } \epsilon_q = 1 + \frac{(2u_1 - x_2)^2}{2} + 2k^2 \frac{p^2 t^2}{4} + O(t^4) \quad (2.87)$$

$$= 1 + \frac{k^2 (\mu^2 + p^2) t^2}{2} + O(t^4) \quad (2.88)$$

Damit ist die Energie in Einheiten von T_c

$$\varepsilon_p = \frac{\varepsilon_q}{t} = \sqrt{\mu^2 + p^2} \quad \text{für } q \neq 0 \quad (2.89a)$$

$$\varepsilon_{p=0} = \frac{\varepsilon_0}{t} = \pm \mu \quad \text{für } \begin{matrix} T > T_c \\ T < T_c \end{matrix} \quad (2.89b)$$

Für den Hamiltonoperator $H^\pm$ in der Nähe von T_c gilt also

$$H^+ \approx \sum_{q=\ell} \sqrt{\mu^2 + \frac{q^2}{t^2}} \left(\xi_q^+ \xi_q - \frac{1}{2} \right) \quad (2.90)$$

$$H^- \approx \sum'_{q=k} \sqrt{\mu^2 + \frac{q^2}{t^2}} \left(\xi_q^+ \xi_q - \frac{1}{2} \right) \pm \mu \left(\xi_0^+ \xi_0 - \frac{1}{2} \right) \quad \text{für } \begin{matrix} T > T_c \\ T < T_c \end{matrix} \quad (2.91)$$

Der Strich an der Summe im Ausdruck für H^- soll daran erinnern, daß der $k = 0$ Term weggelassen wurde.

Das Spektrum der Einteilchenenergien ist in Fig. 2.5 für den Fall $k = 1$, $t = 0.01$, $M = 1000$ dargestellt.

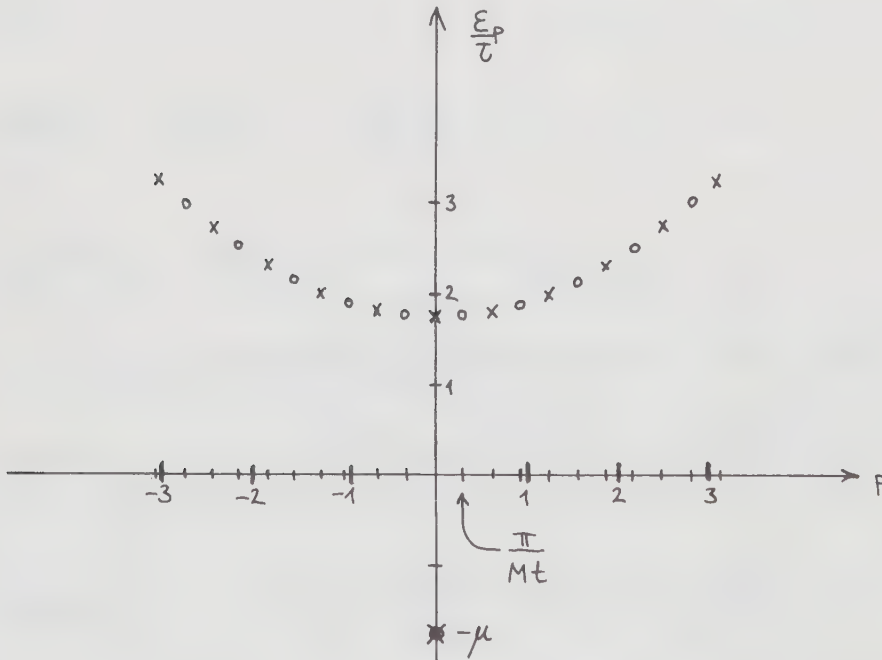


Fig. 2.5: Einteilchenspektrum für $k = 1$, $t = 0.01$, $M = 1000$ im Bereich $q \ll 1$. Für $t = -0.01$ gilt die untere Nullmode $\otimes$

Führt man den in Abschnitt 5 erklärten Skalenlimes durch, so ist neben $t \rightarrow \pm 0$ auch $M, N \rightarrow \infty$ verbunden. Es gilt

$$\frac{1}{M} \sum_q \longrightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} dq = \frac{t}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dp \quad (2.92)$$

$$\xi_q \longrightarrow \sqrt{\frac{2\pi}{|t|M}} \xi_p \quad (2.93)$$

Die renormierten Impulsoperatoren ξ_p genügen damit den kanonischen Vertauschungsrelationen

$$\{\xi_p, \xi_{p'}\} = \{\xi_p^+, \xi_{p'}^+\} = 0 \quad \{\xi_p^+, \xi_{p'}\} = \delta(p-p') \quad (2.94)$$

Mit der Renormierung (2.93) der Operatoren ergibt sich der Hamiltonoperator bis auf eine additive Konstante zu

$$H^\pm = \int_{-\infty}^{+\infty} dp \sqrt{\mu^2 + p^2} \xi_p^+ \xi_p + \text{Nullmode} \quad (2.95)$$

Die diskrete Null-Eigenmode ist vom Maß Null und trägt zum Integral in (2.95) nicht bei. Physikalische Effekte, die von dieser Nullmode (bei $T < T_c$) abhängen, werden also nicht in einer Hamiltondichte berücksichtigt. Im exakten Hamiltonoperator steckt also mehr als die relativistische Energie-Impuls-Beziehung; nämlich auch die diskrete Nullmode. Es wird sich zeigen, daß für gewisse globale Größen, wie Fermionzahloperator oder Unordnungsparameter, diese diskrete Mode eine wichtige Rolle spielt. Mit lokalen Größen wie Hamiltondichte kann das Ausscheren einer Eigenmode nicht beschrieben werden.

Beschreibt man eine Theorie nur durch solche lokalen Größen, so muß die Information über den Null-Eigenwert zusätzlich postuliert werden. Eine der Eigenschaften, die von diesem Null-Eigenwert herrühren, ist die im Abschnitt 6 beschriebene Entartung des Grundzustands für $T < T_c$.

8. Skalenlimes des Majoranaspinor ψ_j

In Abschnitt 5 konnten wir sehen, daß die Größe ψ_j im Skalenlimes die Diracgleichung erfüllt. Dort ergab sich eine bestimmte Darstellung der γ -Matrizen aus der speziellen Art der Wahl der Komponenten

$$\begin{aligned}\psi_j^1 &= c_j^+ + c_j \\ \psi_j^2 &= -i(c_j^+ - c_j)\end{aligned}\tag{2.96}$$

Wir interessieren uns nun für die Darstellung des Spinors ψ_j durch die Theorie diagonalisierenden Operatoren ξ_q und ξ_q^+ . Die Fourierdarstellung (2.63) und die Bogoliubov-Valatin-Rotation (2.66) liefert

$$\psi_j^1 = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_q \left\{ e^{i(qj - \frac{\pi}{4} + \phi_q)} \xi_q + e^{-i(qj - \frac{\pi}{4} + \phi_q)} \xi_q^+ \right\} \tag{2.97a}$$

$$\psi_j^2 = \frac{-i}{\sqrt{M}} \sum_q \left\{ -e^{i(qj - \frac{\pi}{4} - \phi_q)} \xi_q + e^{-i(qj - \frac{\pi}{4} - \phi_q)} \xi_q^+ \right\} \tag{2.97b}$$

Bei der Ableitung wurde $\sin \phi_q = -\sin \phi_{-q}$ benützt. (2.97) läßt sich mit Hilfe der Spinoren

$$u_q = \begin{pmatrix} e^{-i(\frac{\pi}{4} - \phi_q)} \\ e^{i(\frac{\pi}{4} - \phi_q)} \end{pmatrix} \tag{2.98}$$

auf die Form

$$\psi_j = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_q e^{iqj} u_q \xi_q + e^{-iqj} u_q^* \xi_q^+ \tag{2.99}$$

bringen. Wir prüfen nach, ob dieser Spinor im Skalenlimes der Diracgleichung genügt. Wie man leicht aus Formel (2.68) sieht, gilt folgender Grenzwert

$$\lim_{\substack{|t| \rightarrow 0 \\ |q| \rightarrow 0}} e^{-2i\phi_q} = \begin{cases} \frac{\mu - ip}{E_p} & \text{für } t > 0 \\ -\frac{\mu + ip}{E_p} & \text{für } t < 0 \end{cases} \tag{2.100}$$

mit $E_p = \sqrt{\mu^2 + p^2}$.

Dabei wurden die Entwicklungen (B7) bzw. (B8) benützt. Der Spinor wird damit für $t > 0$

$$u_p = \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{E_p}} \begin{pmatrix} \sqrt{\mu+ip} \\ i\sqrt{\mu-ip} \end{pmatrix} \quad (2.101)$$

Mit der Darstellung (2.40) der γ -Matrizen kann man leicht verifizieren, daß

$$\begin{aligned} (\not{p} + \mu) u_p &= 0 \\ (\not{p} - \mu) u_p^* &= 0 \end{aligned} \quad (2.102)$$

Für den Fall $t < 0$ ergibt sich eine Umkehrung des Massenvorzeichens.

Die Kontinuumsgrößen $p = \frac{q}{|t|}$ und $x = |t|$ sowie der Übergang zur Integraldarstellung $\frac{1}{M} \sum_q \rightarrow \int \frac{dq}{2\pi}$ ergibt mit der Einführung der Kontinuums-Operatoren

$$\xi_p = \sqrt{\frac{|t|M}{2\pi}} \xi_q, \quad \psi^\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{|t|}} \psi_j^\alpha \quad (2.103)$$

folgende Fourierzerlegung eines Majoranafeldes

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{\sqrt{2\pi}} \left[e^{ipx} u_p \xi_p + e^{-ipx} u_p^* \xi_p^+ \right] \quad (2.104)$$

Die Regularisierung und Renormierung des Operators ψ_j erfolgt mit dem multiplikativen Faktor $Z(t) \propto \sqrt{|t|}$, was einem kritischen Exponenten von $\frac{1}{2}$ entspricht.

Dies entspricht genau der eingepägten Dimension des Spinorfeldes. Dies ist der Grund, weshalb der Skalenlimes der Dynamik in diesen Operatoren nicht trivial wird und einfach durchzuführen war ($\sum_j m \psi_j^1 \psi_j^2 \rightarrow \int \frac{dx}{2\pi|t|} |t| \psi^1(x) \psi^2(x)$).

Die Beziehung (2.103) gewährleistet die richtigen Antivertauschungsrelationen in der Kontinuumsprache

$$\{ \psi^\alpha(x), \psi^\beta(y) \} = 2 \delta_{\alpha\beta} \delta(x-y) \quad (2.105)$$

Im letzten Kapitel haben wir gesehen, daß es ein Majoranafeld gibt, dessen Fourierkomponenten ξ_p, ξ_p^+ die beiden Anteile der Transfermatrix $V^\pm$ bzw. die Hamiltonoperatoren $H^\pm$ diagonalisieren. In diesen Freiheitsgraden läßt sich die Theorie lösen. Der entscheidende Nachteil dieses Feldes ist der, daß an dieses Feld nichtlokale Randbedingungen (siehe Abschnitt 2.3) gestellt wurden und damit die Asymptotenbedingung [39]

$$\psi(x') \xrightarrow{x^0 \rightarrow \pm \infty} \psi(x')_{\substack{\text{out} \\ \text{in}}} = \text{freies Feld} \quad (2.106)$$

nicht erfüllt werden kann. Deshalb ist dieses Feld kein interpolierendes Feld (nach LSZ [22]) und damit nicht als Teilchen interpretierbar.

Das Feld $\psi(x)$ sagt wenig über den Teilchen-Aspekt der Theorie aus. Wir wollen diese mathematische Variable als Basisfeld bezeichnen, da sich die Dynamik in diesem Feld besonders einfach darstellt.

Die Tatsache, daß das Basisfeld einer freien Feldgleichung genügt, darf nicht zur Aussage verleiten, daß wir es hier mit einer Theorie eines freien propagierenden Feldes zu tun haben. Das Feld ψ hat zwar eine einfache Dynamik, hat aber eine sehr komplizierte Randbedingung, die gravierende Effekte, nämlich Wechselwirkung hinterläßt. Eine Analogie zu einem klassischen System kann hier nützlich sein.

Genau wie ein einfaches klassisches System, das Zwangskräften unterworfen ist, komplizierte Bewegungen ausführen kann, ist hier eine einfache Dynamik, beschrieben durch das Basisfeld $\psi(x)$ durch die Randbedingungen zu einer komplizierten Teilchendynamik gezwungen (Teilchenfelder haben per definitionem immer triviale Randbedingungen). Also:

$\psi(x)$ mit	Kompl.	Teilchenfelder	einfache
	+	≡	+
einfacher Dynamik	Rdbed.	mit kompl.Dyn.	Rdbed.

Die Theorie des Isingmodells, definiert durch die Wirkung (2.5), ist also im Limes einer Feldtheorie nicht allein durch die Feldgleichungen oder in einer Lagrangeformulierung der Theorie, nicht allein durch die Lagrange-dichte vollständig bestimmt. Man hat auch noch Angaben über Randbedingungen zu machen. Diese können, wie in diesem Kapitel sichtbar wurde, in der Kontinuumsprache leicht übersehen werden.

Es ist im allgemeinen keine triviale Aufgabe, die interpolierenden Felder, also die für Zeit $t \rightarrow \pm\infty$ als Teilchen interpretierbaren Felder mit Hilfe der Basisfelder darzustellen. Dies wird in Kapitel 5 geleistet.

3. Kapitel - Ising-Feldtheorie im Lagrangeformalismus

Im letzten Kapitel haben wir im Hamiltonformalismus, also unter der für relativistische Zwecke etwas ungerechtfertigten Auszeichnung der Zeitrichtung ein der Theorie zugrundeliegendes Majoranafeld gefunden. Wir wollen nun versuchen, in einer mehr kovarianten Weise eben dieses Basisfeld zu konstruieren.

In dieser Formulierung, die ohne Hilbertraumkonzept auskommt, aus der sich jedoch ein Hilbertraum konstruieren läßt [42], ist das erzeugende Funktional

$$Z[J(x)] = \int D\phi(x) e^{-\int d^4x (\mathcal{L}[\phi(x)] + J(x)\phi(x))} \quad (3.1)$$

das alle n-Punktfunktionen der Theorie bestimmt, durch die Lagrangefunktion und die Randbedingungen an die klassischen c-Zahlfelder $\phi(x)$ (oder im Fall von Fermionen durch antikommutierende Grassmannvariablen) vollständig bestimmt. Wir bezeichnen diesen Weg deshalb als Lagrangeformulierung. Die Zielsetzung dieses Kapitels ist dreifach:

Erstens soll der Zusammenhang zwischen fermionischen Feldtheorien und Spinsystemen im Kontinuumslimit aufgezeigt werden. Ein Beispiel ist die im vorigen Kapitel aus einem Spinsystem - dem Isingmodell - abgeleitete Diracgleichung. Zweitens ist die Behandlung einer Feldtheorie durch kovariante Konzepte, wie z.B. Lagrangedichten, zur Diskussion von Symmetrien üblicher. Vor allem wird die duale Symmetrie, eine diskrete Symmetrie, die Hoch- und Tieftemperaturentwicklungen ineinander transformiert, klarer.

Drittens soll der Zusammenhang mit dem bisher behandelten Transfermatrixformalismus erläutert werden. Der Schwerpunkt liegt dabei in der wichtigen Rolle, die die kohärenten Zustände spielen.

1. Graphische Entwicklung der Zustandssumme

Wir wollen in diesem Abschnitt eine Graphenentwicklung [43] der Zustandssumme herleiten, in der keine der beiden Raum-Zeit-Richtungen ausgezeichnet ist. Da diese Entwicklung nicht nur in zwei Dimensionen möglich

ist, wollen wir das allgemeine d-dimensionale Isingmodell behandeln.

Die Zustandssumme (2.1) ist eine Konfigurationssumme über Produkte von Faktoren $e^{\frac{x_\alpha}{2} \sigma_{\vec{n}} \sigma_{\vec{n}+\vec{e}_\alpha}}$, die je zwei Punkten im Gitter $\vec{n}$, $\vec{n} + \vec{e}_\alpha$, also einer Verbindungslinie (Bond) zugeordnet sind

$$Z = \sum_{\{\sigma\}} \prod_{\alpha} \prod_{\vec{n}} e^{\frac{x_\alpha}{2} \sigma_{\vec{n}} \sigma_{\vec{n}+\vec{e}_\alpha}} \quad (3.2)$$

Da die Werte für $\sigma_{\vec{n}}$ nur ± 1 sind, gilt $(\sigma_{\vec{n}} \sigma_{\vec{n}+\vec{e}_\alpha})^2 = 1$ und damit

$$e^{\frac{x_\alpha}{2} \sigma_{\vec{n}} \sigma_{\vec{n}+\vec{e}_\alpha}} = \cosh \frac{x_\alpha}{2} + \sinh \frac{x_\alpha}{2} \sigma_{\vec{n}} \sigma_{\vec{n}+\vec{e}_\alpha} \quad (3.3)$$

sowie die Zustandssumme

$$Z = \left(\prod_{\alpha} \cosh \frac{x_\alpha}{2} \right)^G \sum_{\{\sigma\}} \prod_{\alpha} \prod_{\vec{n}} \left(1 + z_\alpha \sigma_{\vec{n}} \sigma_{\vec{n}+\vec{e}_\alpha} \right) \quad (3.4)$$

mit $z_\alpha = \tanh \frac{x_\alpha}{2}$ und $G = \prod_{\alpha} N_\alpha =$ Zahl der Gitterplätze.

Die Entwicklung der Produkte in (3.4) ergibt ein Polynom in $\{z_1, z_2, \dots, z_d\}$

$$Z \propto \sum_{\{\sigma\}} \left(1 + \sum_{\alpha, \vec{n}} z_\alpha \sigma_{\vec{n}} \sigma_{\vec{n}+\vec{e}_\alpha} + \sum_{\substack{\alpha, \alpha' \\ \vec{n}, \vec{n}'}} z_\alpha z_{\alpha'} \sigma_{\vec{n}} \sigma_{\vec{n}+\vec{e}_\alpha} \sigma_{\vec{n}'} \sigma_{\vec{n}'+\vec{e}_{\alpha'}} + \dots \right) \quad (3.5)$$

Die Konfigurationssumme kann nun über die einzelnen Summanden genommen werden und bewirkt, daß nur diejenigen Terme überleben, in denen alle $\sigma_{\vec{n}}$ zwei-, vier- oder 2d-mal vorkommen. Die ungeraden Terme verschwinden, da

$$\sum_{\sigma_{\vec{n}}} \sigma_{\vec{n}} = (+1) + (-1) = 0 \quad (3.6)$$

Der niedrigste Term (außer der 1, der den Faktor 2^G liefert) ist der $z_\alpha^2 z_{\alpha'}^2$ -Term, den wir in Fig. 3.1a graphisch dargestellt haben. Dieser Term kommt mit der Multiplizität $N_\alpha N_{\alpha'}$, vor, falls man von Randeffekten absieht. In Fig. 3.1 sind weitere Beispiele gezeichnet, die Beiträge zur Zustandssumme liefern (a,...d). Jedes Verbindungsstück, in Richtung α gelegen, trägt den Faktor z_α zum Summand in (3.5) bei. Wir haben uns in Fig. 3.1 natürlich auf die Ebene (α, α') im d-dimensionalen Raum beschränkt.

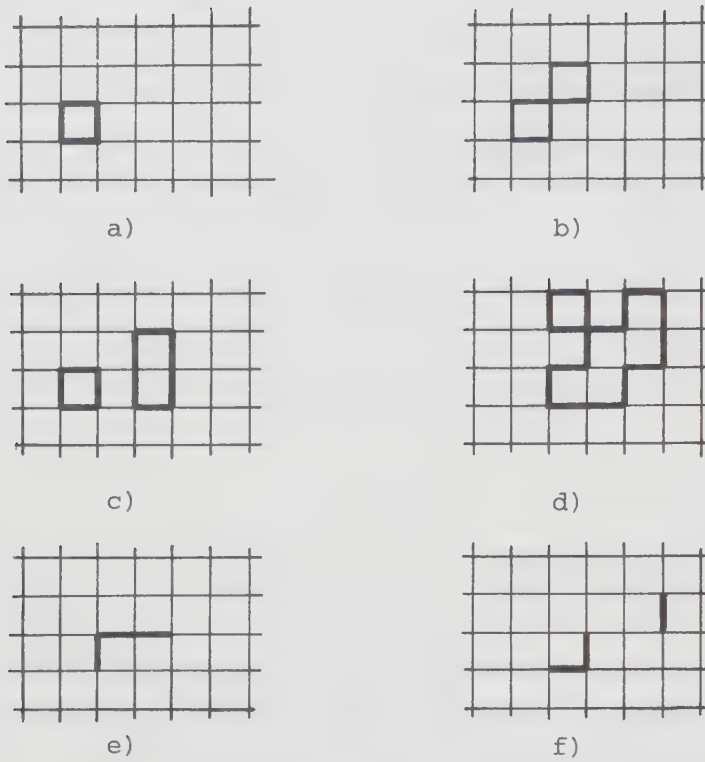


Fig. 3.1: Einige Polygonzüge in der Hochtemperaturentwicklung der Zustandssumme

Wir sehen, daß nur geschlossene, möglicherweise sich überschneidende Polygonzüge vorkommen (siehe Fig. 3.1b). Offene Polygonzüge, wie in Fig. 3.1e und f, verschwinden durch die Konfigurationssumme wegen (3.6).

Auch mehrere Polygonzüge, die sich nicht berühren, d.h. mindestens eine Linie gemeinsam haben, sind möglich (siehe Fig. 3.1c). Ein Beitrag zur Zustandssumme ist also durch einen Graphen der Fig. 3.1 eindeutig charakterisiert.

Falls man mit $P_{v_1 v_2 \dots v_d}$ die Zahl der möglichen Graphen bezeichnet, die v_i Verbindungslinien der Richtung α_i besitzen, läßt sich die Zustandssumme als Graphenentwicklung schreiben

$$Z = \sum_{\text{Graph}} Z_{\text{Graph}} \quad (3.7)$$

mit

$$f = \left(2 \prod_{\alpha} \text{ch} \frac{x_{\alpha}}{2} \right)^G$$

und
$$Z_{\text{Graph}} = \sum_{\text{Graphen}} P_{v_1 \dots v_d} z_1^{v_1} z_2^{v_2} \dots z_d^{v_d}$$

Im Fall $d = 2$ gilt z.B. für den Graph in Fig. 3.1a, $P_{22} = \text{NM}$ mit NM gleich der Zahl der Gitterplätze. In Fig. 3.1d ist ein Graph mit $v_1 = 8, v_2 = 8$, also der Ordnung $z_1^8 z_2^8$ dargestellt. Wegen der dargestellten Eigenschaften wird die Form (3.7) auch als Verbindungslinien-(Bond) oder Schleifen-(Loop)-entwicklung bezeichnet. In der statistischen Physik ist sie auch als Hochtemperaturoentwicklung bekannt, da $z_i = \text{th} \frac{2J_i}{T}$ ein guter Entwicklungsparameter wird, falls $T \gg 2J_i$.

Für den uns hier interessierenden zweidimensionalen Fall gilt

$$Z = \left(2 \text{ch} \frac{x_1}{2} \text{ch} \frac{x_2}{2} \right)^{\text{NM}} \sum_{\text{Graph}} P_{v_1 v_2} z_1^{v_1} z_2^{v_2} \quad (3.8)$$

Da im weiteren immer die Randbedingungen eine entscheidende Rolle spielen, soll betont werden, daß hier periodische Randbedingungen benützt wurden, also das Gitter auf einen Torus T_2 gewickelt wurde. Unter geschlossenen Polygonzügen sind dann auch die in Fig. 3.2 gezeichneten topologisch nichttrivialen zu betrachten.

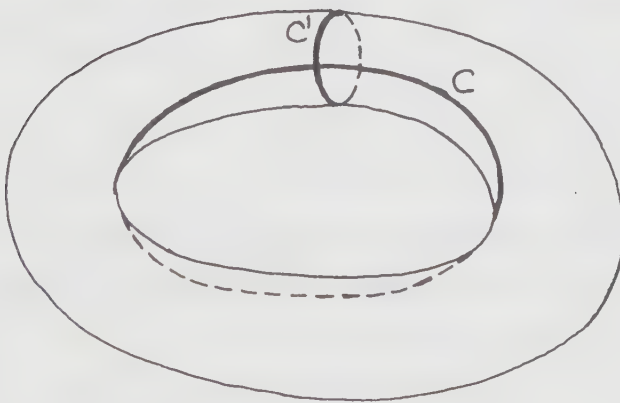


Fig. 3.2: Das 2-dim. Gitter auf einen Torus gewickelt;
C und C' sind topologisch nichttriviale Polygonzüge

Für den Fall offener Randbedingungen ändert sich der Faktor f

$$\begin{aligned}
 f_{\text{off. Rdbed.}} &= 2^{NM} \left(\text{ch } \frac{x_1}{2} \right)^{(N-1)M} \left(\text{ch } \frac{x_2}{2} \right)^{(M-1)N} \\
 &= f_{\text{per. Rdbed.}} \left(\text{ch } \frac{x_1}{2} \right)^{-M} \left(\text{ch } \frac{x_2}{2} \right)^{-N}
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

Es treten dann auch keine topologisch nichttrivialen Polygonzüge auf. Da $P_{\nu_1 \nu_2}$ symmetrisch in den Indizes ν_1, ν_2 ist, ist die Symmetrie des Ausdrucks (3.8) bezüglich Vertauschung beider Richtungen offensichtlich.

2. Geometrische Darstellung nach Peierls-Konturen und Dualität

Neben der Darstellung (3.8) gibt es noch eine weitere, in der die Konfigurationen $\{\sigma\}$ nach "Peierls-Konturen" klassifiziert werden [44]. Wir wollen diese Klassifikation anhand des zweidimensionalen Modells klarmachen.

Nehmen wir periodische Randbedingungen (T_2), so können wir eindeutig an den Grenzen zwischen Spin $\uparrow$ ($\sigma = +1$) und Spin $\downarrow$ ($\sigma = -1$) Gebieten Linien zeichnen, sogenannte Bloch-"Wände" oder Peierls-Konturen, die die Konfiguration bestimmen. Zu einer Peierls-Kontur gehören zwei mögliche Spin-Konfigurationen.

Zeichnet man ein Gitter, das senkrecht auf den Verbindungslinien steht (duales Gitter), so liegen die Peierls-Konturen auf diesem Gitter. In Fig. 3.3 ist die Peierls-Kontur für eine bestimmte Konfiguration angegeben. Die topologische Struktur der Peierls-Entwicklung ist gleich der der Graphenentwicklung im vorigen Abschnitt.

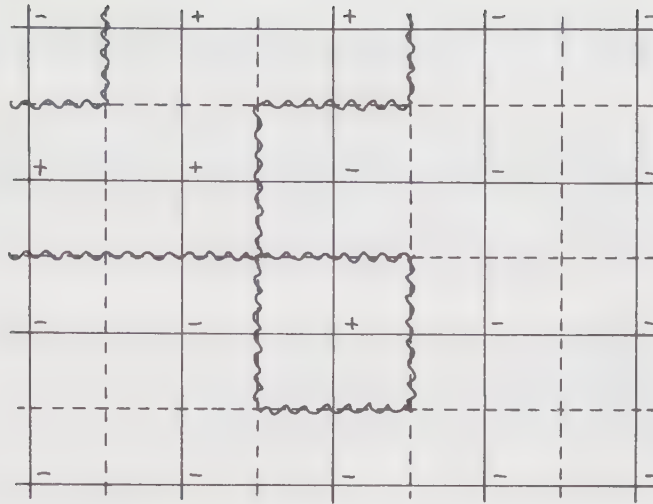


Fig. 3.3: Das duale Gitter des Isingmodells

- ursprüngliches Gitter
- duales Gitter
- ~~~~~ Peierls-Kontur im ursprünglichen Gitter
≡ Bondentwicklung im dualen Gitter

Die Konfiguration ohne Peierls-Konturen trägt $(e^{\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2}})^{NM}$ zur Zustandssumme bei. Kreuzt eine Peierls-Kontur eine Verbindungslinie, so heißt das, daß der Beitrag der früher $e^{\frac{x_k}{2}}$ war, jetzt $e^{-\frac{x_k}{2}}$ wird. Ein Element (Bond im dualen Gitter) der Peierls-Kontur liefert also den Faktor e^{-x_k} zur Zustandssumme. Kreuzt eine Kontur v_1 "Bonds" der ersten Richtung und v_2 "Bonds" der zweiten Richtung, ist sie also $v_1 + v_2$ Einheiten lang, so trägt diese Konfiguration $(e^{x_1/2 + x_2/2})^{NM} e^{-x_1 v_1 - x_2 v_2}$ zur Zustandssumme bei.

Führen wir wie im vorigen Abschnitt die Anzahl $P_{v_1 v_2}$ der möglichen Peierls-Konturen der Länge $v_1 + v_2$ ein, so ergibt sich

$$Z = 2 \left(e^{\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2}} \right)^{NM} \sum_{\text{Peierls-Konturen}} P_{v_1 v_2} \omega_1^{v_1} \omega_2^{v_2} \quad (3.10)$$

mit $\omega_i = e^{-x_i}$

Der Faktor 2 kommt daher, daß zwei Konfigurationen einer Kontur entsprechen.

Wegen $\omega_i \ll 1$ für $2J_i \gg T$ sprechen wir von (3.10) als Tieftemperaturentwicklung.

Vergleichen wir die beiden Entwicklungen, so ergibt sich eine Beziehung zwischen der Zustandssumme zur Temperatur T mit x_1 und x_2 und einer Zustandssumme zur Temperatur T^* mit x_1^* und x_2^*

$$\frac{Z(x_1^*, x_2^*)}{2(e^{\frac{x_1^*}{2} + \frac{x_2^*}{2}})^{NM}} = \frac{Z(x_1, x_2)}{(2 \operatorname{ch} \frac{x_1}{2} \operatorname{ch} \frac{x_2}{2})^{NM}} \quad (3.11)$$

Die Temperatur T^* bestimmt sich aus der Gleichheit der Entwicklungskoeffizienten der beiden Entwicklungen (3.7) bzw. (3.10).

$$\begin{aligned} \omega_1^* = z_2 & \iff e^{-x_1^*} = \operatorname{th} \frac{x_2}{2} & \iff \operatorname{sh} x_2 \operatorname{sh} x_1^* = 1 \\ \omega_2^* = z_1 & \iff e^{-x_2^*} = \operatorname{th} \frac{x_1}{2} & \iff \operatorname{sh} x_1 \operatorname{sh} x_2^* = 1 \end{aligned} \quad (3.12)$$

Eine etwas symmetrischere Form der Beziehung (3.11) ist

$$\frac{Z(x_1^*, x_2^*)}{(\operatorname{sh} x_1^* \operatorname{sh} x_2^*)^{\frac{NM}{4}}} = \frac{2 Z(x_1, x_2)}{(\operatorname{sh} x_1 \operatorname{sh} x_2)^{\frac{NM}{4}}} \quad (3.13)$$

Kennt man die Zustandssumme für (x_1, x_2) , so kennt man sie auch für (x_1^*, x_2^*) . Die Transformation von den Kopplungen (x_1, x_2) zu den (x_1^*, x_2^*) nennt man Dualitätstransformation. Wir sehen, daß die Zustandssumme bis auf einen Faktor dualitätsinvariant ist. Führt man auf dem dualen Gitter (siehe Fig. 3.3) in Analogie zu σ_{ij} an den Gitterplätzen neue Variablen μ_{ij} ein ($\mu_{ij} = \pm 1$), so gehen die Peierls-Konturen bezüglich des ursprünglichen Gitters über in die Graphenentwicklung (Hochtemperaturentwicklung) der Variable μ_{ij} auf dem dualen Gitter [45].

Die Transformation

$$\begin{aligned}
 (x_1, x_2) &\longmapsto (x_1^*, x_2^*) \\
 \text{Gitter} &\longmapsto \text{duales Gitter} \\
 \sigma_{ij} &\longmapsto \mu_{ij} \\
 \text{Randbed.} &\longmapsto \text{duale Randbed.}^*)
 \end{aligned}
 \tag{3.14}$$

läßt also die Aspekte der Theorie, die von der Zustandssumme bestimmt werden, invariant. Man nennt deshalb die Theorie selbstdual.

Für ein und dieselbe Theorie - d.h. x_1, x_2 fest - erlaubt die Dualitätseigenschaft also zwei Entwicklungen der Zustandssumme, die man unter der allgemeinen Beziehung

$$Z_{\text{ising}} = f^{\pm}(x_1, x_2) Z_{\text{graph}}(z_1, z_2) \tag{3.15}$$

zusammenfassen kann.

(1) Hochtemperaturentwicklung

$$f^+ = \left(2 \operatorname{ch} \frac{x_1}{2} \operatorname{ch} \frac{x_2}{2} \right)^{NM} \quad z_i = \operatorname{th} \frac{x_i}{2} \tag{3.16}$$

(2) Tieftemperaturentwicklung

$$\begin{aligned}
 f^- &= 2 \left(e^{\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2}} \right)^{NM} & z_1 &= e^{-x_2} \\
 & & z_2 &= e^{-x_1}
 \end{aligned}
 \tag{3.17}$$

Für die Zustandssumme geschlossener, sich nicht berührender Polygonzüge wollen wir im nächsten Abschnitt eine Darstellung durch ein Integral über Graßmannvariablen herleiten.

3. Das Integral über Graßmannvariable [46]

Es gibt für Modelle, die eine graphische Entwicklung haben (wie z.B. das Isingmodell in d-Dimensionen), eine Darstellung der Zustandssumme durch

*) Zur Diskussion der Randbedingungen siehe [57]

Integrale über Graßmannzahlen, d.h. antikommutierende c-Zahlen. Eine Einführung in die Integrationstheorie dieser antikommutierenden Größen ist im Buch von Berezin [47] zu finden.

Falls man Glück hat, findet man eine Darstellung, in der die Wirkung quadratisch in den neuen Variablen ist. Wir nennen eine Theorie, die diese Eigenschaft hat, quasifrei. Wie wir unten zeigen werden, ist ein Beispiel für eine derartige Theorie das Isingmodell in zwei Dimensionen. Im Gegensatz zu den Fermionen von LMS [12] in Kapitel 2 sind die Variablen nun total antikommutierende Größen x_{ij} ; es gilt also z.B.

$$\{x_{ij}, x_{ij}^+\} = 0 \quad (3.18)$$

Diese Darstellung der Theorie durch Graßmannvariablen ist nicht eindeutig. Es gibt z.B. für das zweidimensionale Isingmodell eine Darstellung, in der acht Graßmannvariablen an einen Gitterplatz zu nehmen sind [46]. Die Kunst, ein Modell zu lösen, besteht darin, die "beste" Darstellung zu finden, und darum die Störungstheorie zu entwickeln. Unter "beste" versteht man den nicht quadratischen Term der Wirkung möglichst klein zu machen.

In unserem Fall ($d = 2$) gelingt es, eine quadratische Wirkung zu finden, die $Z_{\text{graph}}(z_1, z_2)$ reproduziert. Diese Zustandssumme ist von der Form eines Gaußintegrals und kann exakt integriert werden. Dies ist der Grund dafür, daß die Zustandssumme dieses Modells exakt berechnet werden kann.

Wir geben das Integral an und zeigen, daß es die Graphenentwicklung des Isingmodells reproduziert. Wir benötigen für jede Richtung des Raumes ein Paar von Graßmannvariablen, also pro Gitterstelle 4, die mit

$$x_{ij}, x_{ij}^+, y_{ij}, y_{ij}^+$$

bezeichnet werden. Um die einzelnen Terme graphisch zu erfassen, ordnen wir jedem bilinearen Ausdruck in diesen Variablen eine orientierte Verbindungslinie (Dimer) zu.

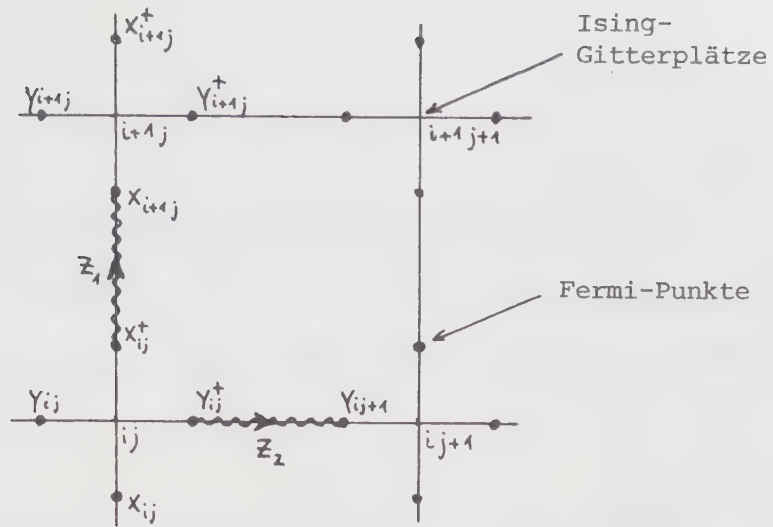


Fig. 3.4: Das Gitter der Fermivariablen

In Fig. 3.4 ist jedem Gitterpunkt des Isinggitters ein Quadrupel von Fermi-punkten zugeordnet. Die Konfigurationssumme setzen wir an als ein Integral über die $4NM$ Integrationsvariablen:

$$Z_{\text{graph}}(z_1, z_2) = \int \prod_{ij} dx_{ij}, dx_{ij}^+, dy_{ij}, dy_{ij}^+ e^{S(z_1, z_2)} \quad (3.19)$$

$$S = \sum_{ij} z_1 x_{ij}^+ x_{i+1, j} + z_2 y_{ij}^+ y_{i, j+1} + b_1 x^+ x + b_2 y^+ y + a_1 y^+ x + a_3 x^+ y + a_2 x^+ y^+ + a_4 x y \quad (3.20)$$

Im Integrationsmaß können wir die Integrationen paarweise über die einzelnen Fermipunkte dx_{ij}, dx_{ij}^+ vertauschen, doch sonst gilt

$$dx_{ij}, dx_{ij}^+ = -dx_{ij}^+, dx_{ij} \quad (3.21)$$

Die Integrationsregeln sind

$$\int dx dx^+ 1 = 0 \quad (3.22a)$$

$$\int dx dx^+ x^+ x = 1 \quad (3.22b)$$

In den Termen der Wirkung ohne Indizes ist in (3.20) und im folgenden immer (i,j) zu lesen. Die beiden ersten Terme sind in Fig. 3.4 eingezeichnet und als Dimer zu erkennen. Die sechs weiteren Terme sind in Fig. 3.5 einzeln aufgeführt. Die Konstanten a_i und b_i ($\in \mathbb{R}$) werden so angepaßt, daß sich die Zustandssumme des Isingmodells ergibt.

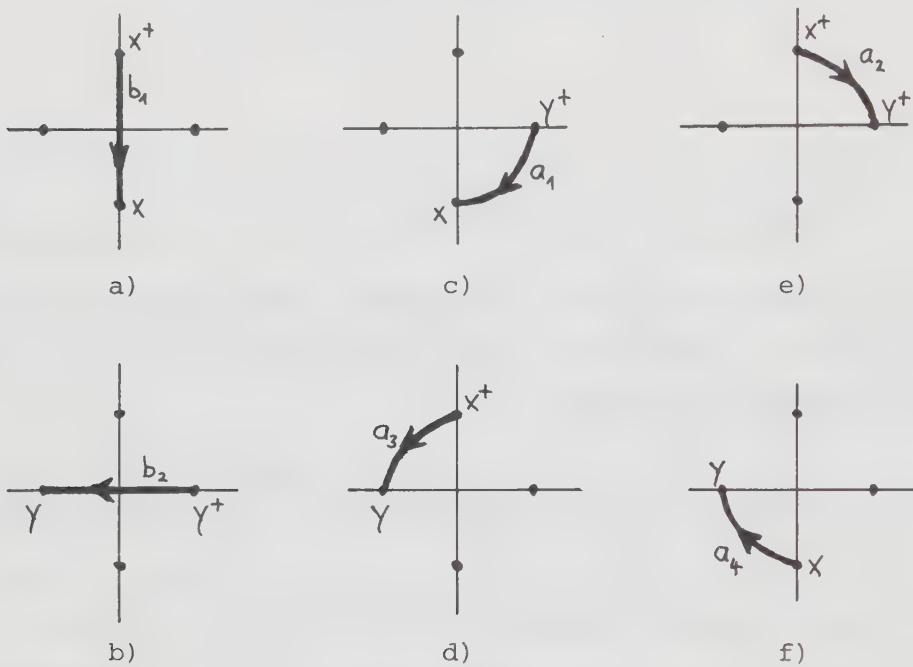


Fig. 3.5: Die Terme der Wirkung, die auf einem Gitterplatz leben

Die Wirkung besteht also nun aus z_i -Dimer, a_i -Dimer und b_i -Dimer, wobei a_i , b_i lokal und die z_i von nächster Nachbarwechselwirkung sind. Um zu sehen, daß die Wirkung (3.20) die Graphenentwicklung des Isingmodells darstellt, betrachten wir den Term im Integrand, wo jede Integrationsvariable genau einmal vorkommt. Die Integrationsregeln (3.22) zeigen, daß bei den anderen Termen jeder für sich Null ergibt.

Der Koeffizient dieses Terms ist die Zustandssumme. Graphisch bedeutet das, daß man das Fermigitter so mit Dimers zu belegen hat, daß jeder Fermipunkt genau einmal als Endpunkt eines Dimers erscheint. In Fig. 3.6

ist eine der möglichen Dimerbelegungen gezeichnet.

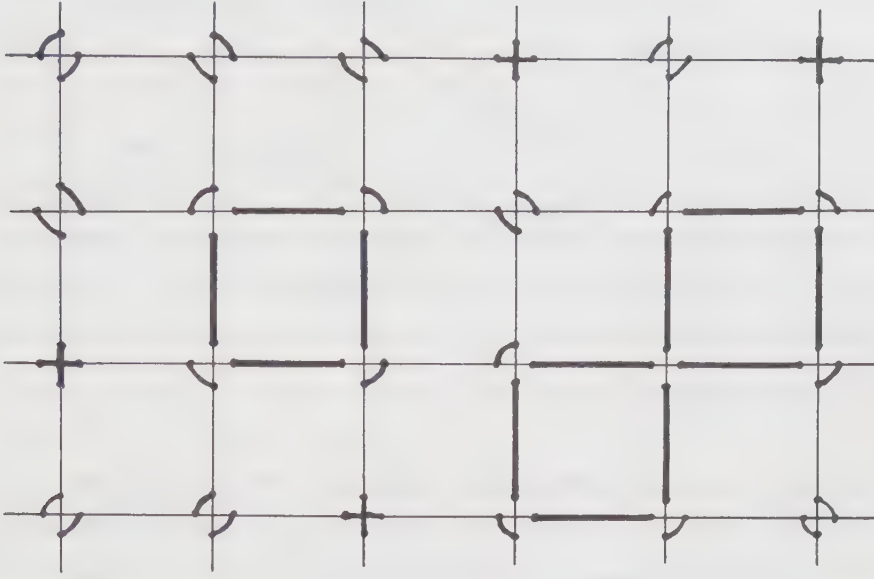


Fig. 3.6: Eine Dimer-Konfiguration, die zu Z beiträgt

Der Integrand ist

$$e^S = \prod_{ij} (1 + z_1 x_{ij}^+ x_{i+1,j}) \prod_{ij} (1 + z_2 y_{ij}^+ y_{i,j+1}) \prod_{ij} (1 + b_1 x^+ x) \prod_{ij} (1 + b_2 y^+ y) \cdot \prod_{ij} (1 + a_1 y^+ x) \prod_{ij} (1 + a_3 x^+ y) \prod_{ij} (1 + a_2 x^+ y^+) \prod_{ij} (1 + a_4 x y) \quad (3.23)$$

In der Entwicklung der einzelnen Polynome in (3.23) interessieren wir uns für die Terme, in denen jedes x_{ij} , y_{ij} , x_{ij}^+ , y_{ij}^+ genau einmal vorkommt.

Betrachten wir zunächst Terme, die keine z_i -Dimer enthalten. Jeder Gitterplatz kann auf drei verschiedene Weisen belegt werden. Mit Hilfe der graphischen Darstellungen in Fig. 3.5 sind dies

$$\begin{aligned} (1) \quad \begin{array}{c} \text{Diagram with } a_2 \text{ and } a_4 \text{ labels} \end{array} &\longrightarrow \int dx dx^+ dy dy^+ a_2 a_4 x^+ y^+ x y = -a_2 a_4 \\ (2) \quad \begin{array}{c} \text{Diagram with } a_3 \text{ and } a_1 \text{ labels} \end{array} &\longrightarrow \int dx dx^+ dy dy^+ a_1 a_3 y^+ x x^+ y = -a_1 a_3 \\ (3) \quad \begin{array}{c} \text{Diagram with } b_2 \text{ and } b_1 \text{ labels} \end{array} &\longrightarrow \int dx dx^+ dy dy^+ b_1 b_2 x^+ x y^+ y = b_1 b_2 \end{aligned} \quad (3.24)$$

Wir wählen nun

$$a_1 a_3 = a_2 a_4 = b_1 b_2 = 1 \quad (3.25)$$

damit der Beitrag, der von den 3^{NM} Termen herrührt, identisch 1 wird. Dies ist genau der Beitrag, der im Z_{graph} (siehe 3.7) $P_{\infty} = 1$ entspricht.

Man kann leicht durch vollständige Induktion über die Zahl der Gitterplätze zeigen, daß dieser Beitrag nullter Ordnung $(-)^{NM}$ liefert. Für den Fall NM gerade, was im weiteren angenommen wird, ergibt sich das gewünschte Ergebnis.

Man sieht auch leicht ein, daß die z_i -Dimer nirgends enden dürfen, denn drei Fermipunkte lassen sich nicht durch b_i - bzw. a_i -Dimer verbinden. Die z_i -Dimer kommen also nur in gerader Anzahl vor, und deshalb ergibt der Beitrag der freien Gitterplätze eines Graphen, also solche, die nicht von z_i -Dimern berührt werden, ebenfalls einen Faktor +1.

Die Multiplizitätsfaktoren $P_{v_1 v_2}$ der einzelnen Graphen sind die selben wie im vorigen Abschnitt.

Betrachten wir den einfachsten Graph der Fig. 3.1a. Er ist auch im linken Teil der Fig. 3.6 zu erkennen.

$$\text{Sein Beitrag ist } a_1 a_3 a_2 a_4 z_1^2 z_2^2 = z_1^2 z_2^2 .$$

$$\text{Der rechte Graph in Fig. 3.1c ergibt } a_1 a_3 a_2 a_4 b_2^2 z_1^4 z_2^2 = z_1^4 z_2^2$$

Wir verlangen also neben (3.25)

$$b_1^2 = b_2^2 = 1 \quad (3.26)$$

Der sich überschneidende Graph in Fig. 3.1b

$$\text{liefert } (a_1 a_3)^2 a_2 a_4 z_1^4 z_2^4 = z_1^4 z_2^4$$

Durch Untersuchung der allgemeinsten Graphen zeigt sich, daß die Bedingungen (3.25) und (3.26) genügen, daß die Graphenentwicklung (3.7) mit den richtigen Faktoren $P_{v_1 v_2}$ erscheint.

Im folgenden benützen wir

$$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 1 \quad (3.27)$$

da man die a_i -Terme in der Wirkung (3.20) auf diese Werte transformieren kann. Das Integralmaß ist invariant unter der Variablenskalierung, nämlich

$$\begin{aligned} x &\mapsto u x & x^+ &\mapsto \frac{1}{u} x^+ \\ y &\mapsto v y & y^+ &\mapsto \frac{1}{v} y^+ \end{aligned} \quad (3.28)$$

mit $v^2 = a_1 a_2$ und $u^2 = \frac{a_2}{a_1}$. Die z_i - und b_i -Dimer ändern sich unter der Transformation (3.28) nicht.

Aus der Bedingung (3.26) folgen die beiden Möglichkeiten

$$b_i = 1 \quad \text{oder} \quad b_i = -1 \quad (3.29)$$

Wir haben gesehen, daß die Zustandssumme des Isingmodells als Integral über Grassmannvariablen x, y, x^+, y^+ zu schreiben ist, also:

$$\begin{aligned} Z &:= \sum_{\{\sigma\}} e^{\sum_{ij} \frac{x_i}{2} \sigma_{ij} \sigma_{i+1,j} + \frac{x_j}{2} \sigma_{ij} \sigma_{i,j+1}} \\ &= f(z_1, z_2) (-1)^{NM} \int \prod_{ij} dx_{ij} dx_{ij}^+ dy_{ij} dy_{ij}^+ e^{S(z_1, z_2)} \end{aligned} \quad (3.30)$$

Der entscheidende Unterschied zwischen beiden Darstellungen ist der, daß die ursprüngliche Variable die diskreten Werte 1 annimmt, die neuen Variablen x, x^+, y, y^+ dagegen "integriert" werden (wenn auch nur formal) und so viel näher an der funktionalen Darstellung eines Feldoperators liegen. Im Abschnitt 5 wird dieser Vorteil benützt, um aus diesem Integral direkt im Kontinuumlimes das erzeugende Funktional einer Feldtheorie herzuleiten. Das bedeutet, die Wirkung in (3.30) als Integral über eine Lagrangedichte zu schreiben.

4. Berechnung der Zustandssumme in kovarianter Weise

Wir gehen von dem im letzten Abschnitt abgeleiteten Integralausdruck für die Zustandssumme des Isingmodells aus (3.30).

Als Randbedingungen an die Grassmannvariablen x und y betrachten wir zunächst Periodizität sowohl in räumlicher als auch in zeitlicher Richtung. Die durch diese Randbedingungen gewährleistete Translationsinvariante erlaubt es, eine Fouriertransformation durchzuführen

$$x_{nm} = \frac{1}{\sqrt{NM}} \sum_{pq} e^{i(pn+qm)} x_{pq} \quad (3.31)$$

$$x_{nm}^+ = \frac{1}{\sqrt{NM}} \sum_{pq} e^{-i(pn+qm)} x_{pq}^+$$

mit den diskreten Impulsen (N, M gerade)

$$p = 0, \pm \frac{2\pi}{N}, \pm \frac{4\pi}{N} \dots \pm \frac{(N-2)\pi}{N}, \pi$$

$$q = 0, \pm \frac{2\pi}{M}, \pm \frac{4\pi}{M} \dots \pm \frac{(M-2)\pi}{M}, \pi \quad (3.32)$$

Entsprechende Gleichungen gelten auch für die Variable y_{nm} bzw. y_{nm}^+ . Die Wirkung (3.20) wird damit

$$S = \sum_{pq} (\bar{z}_1 e^{ip} + b_1) x_{pq}^+ x_{pq} + (\bar{z}_2 e^{iq} + b_2) y_{pq}^+ y_{pq} +$$

$$+ a_1 y_{pq}^+ y_{pq} + a_3 x_{pq}^+ y_{pq} + a_2 x_{pq}^+ y_{-p-q}^+ + a_4 x_{pq} y_{-p-q} \quad (3.33)$$

Diese Wirkung entkoppelt verschiedene Impulskomponenten und nur das Impulspaar $(-p-q)$ mischt mit (pq) .

Um die Wirkung auf eine fermionenzahlerhaltende Form zu bringen, betrachten wir die impulsabhängige Transformation

$$x_{pq} \longmapsto x_{pq}^+ ; \quad x_{pq}^+ \longmapsto -x_{pq}$$

$$y_{pq} \longmapsto y_{pq}^+ \quad y_{pq}^+ \longmapsto -y_{pq} \quad (3.34)$$

falls $p < 0$, q beliebig und $p = 0$, $q < 0$.

Dieser Bereich BII ist schraffiert in Fig. 3.7 gezeichnet.

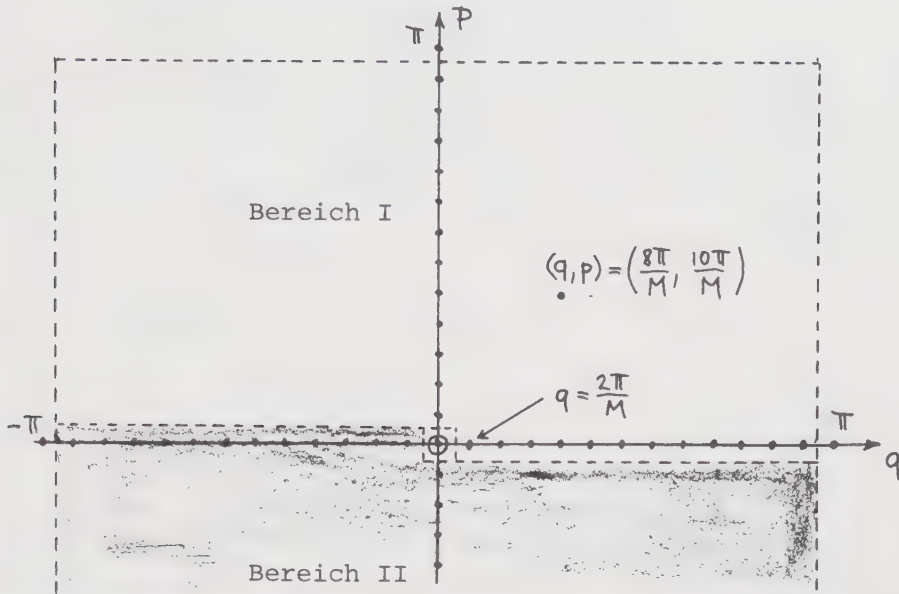


Fig. 3.7: Impulsraum für periodische Randbedingungen im Ortsraum

Für den restlichen Bereich BI des Impulsraumes und für die $(q = 0, p = 0)$ -Mode wirkt die Identität. Durch diese Transformation ergibt sich die Wirkung

$$\begin{aligned}
 S = & \sum_{pq} h_p x_{pq}^+ x_{pq} + h_q y_{pq}^+ y_{pq} + a_1 y_{pq}^+ x_{pq} + a_3 x_{pq}^+ y_{pq} \\
 & + \sum_{BI} -a_2 x_{pq}^+ y_{-p-q} + a_4 x_{pq} y_{-p-q}^+ \\
 & + \sum_{BII} -a_2 x_{pq} y_{-p-q}^+ + a_4 x_{pq}^+ y_{-p-q} \\
 & + a_2 x_{00}^+ y_{00}^+ + a_4 x_{00} y_{00}
 \end{aligned}
 \tag{3.35}$$

mit

$$\begin{aligned}
 h_p &= z_1 e^{ip} + b_1 \\
 h_q &= z_2 e^{iq} + b_2
 \end{aligned}
 \tag{3.36}$$

Die Mode $(p, q) = (0, 0)$, die sich nicht auf die Form $a^+ a$ bringen läßt, muß getrennt behandelt werden.

Durch Umbenennung $p \rightarrow -p$, $q \rightarrow -q$ im Bereich BII erhält man

$$S = \sum_{\text{BII}} (x_{pq}^+, y_{pq}^+, x_{-p-q}^+, y_{-p-q}^+) A_{pq} \begin{pmatrix} x_{pq} \\ y_{pq} \\ x_{-p-q} \\ y_{-p-q} \end{pmatrix} + S_{00} \quad (3.37)$$

mit

$$A_{pq} = \begin{pmatrix} h_p & a_3 & 0 & -a_2 \\ a_1 & h_q & a_2 & 0 \\ 0 & a_4 & h_{-p} & a_1 \\ -a_4 & 0 & a_3 & h_{-q} \end{pmatrix} \quad (3.38)$$

Durch eine Gaußsche Integration über Grassmannvariablen ergibt sich für die Zustandssumme

$$Z_{\text{graph}} = \prod_{\text{BII}} \det A_{pq} \cdot \int dx_{00} dx_{00}^+ dy_{00} dy_{00}^+ e^{S_{00}} \quad (3.39)$$

Falls, wie für das Isingmodell, $a_1 a_3 = a_2 a_4 = 1$ gilt, ist

$$\det A_{pq} = h_p h_q h_{-p} h_{-q} - (h_p + h_{-p})(h_q + h_{-q}) + 4 \quad (3.40)$$

Man kann in (3.39) auch über den gesamten Bereich des Impulsraumes integrieren, da $\det A_{pq} = (\det A_{-p-q})^{\frac{1}{2}} \cdot (\det A_{pq})^{\frac{1}{2}}$ und

$$\int dx_{00} dx_{00}^+ dy_{00} dy_{00}^+ e^{S_{00}} = (\det A_{00})^{\frac{1}{2}} \quad (3.41)$$

Das Ergebnis ist:

$$Z_{\text{ising}}^{\text{MN}} = f(z_1, z_2) \prod_{pq} (\det A_{pq}(z_1, z_2))^{\frac{1}{2}} \quad (3.42)$$

(alle Gitterpunkte)

$$= f(z_1, z_2) \exp \left[\frac{1}{2} \sum_{pq} \ln(\det A_{pq}) \right] \quad (3.43)$$

Im thermodynamischen Limes erhält man mit (3.40), (3.36), (3.16) und etwas Algebra für die freie Energie pro Gitterplatz des Isingmodells

$$F = -T \lim_{M, N \rightarrow \infty} \frac{1}{NM} \ln Z_{\text{ising}}^{NM} \quad (3.44)$$

$$= -T \left\{ \ln 2 + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{dp}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{dq}{2\pi} \ln [ch x_1 ch x_2 - sh x_2 \cos q - sh x_1 \cos p] \right\} \quad (3.45)$$

Wir haben also gesehen, daß die Form (3.30) der Zustandssumme für eine Berechnung am geeignetsten ist. Im Vergleich zu den Ableitungen von Onsager [11] und von Wu und McCoy [48] ergibt sich eine erhebliche Vereinfachung.

5. Ableitung einer Lagrangedichte im Skalenlimes

In diesem Abschnitt wollen wir, ausgehend von der Wirkung (3.37) im Impulsraum, eine im Skalenlimes gültige Form ableiten. Wir kommen damit auf eine Lagrangedichte, die die Theorie im Skalenlimes parametrisiert. Diese Ableitung wurde in der Literatur noch nicht diskutiert und soll hier als Beispiel für eine Ableitung einer Feldtheorie dienen, die aus einem Gitterspinsystem in natürlicher Weise am kritischen Punkt folgt.

Im vorigen Abschnitt haben wir den thermodynamischen Limes der freien Energiedichte berechnet. Hier wollen wir den Skalenlimes bereits im Graßmannintegral (3.30) betrachten.

Wir entwickeln in der Matrix (3.38) die Diagonalelemente bis zur Ordnung $O(t)$ um den kritischen Punkt. Mit $a_i = b_i = 1$ und den skalierten Impulsen $p = k p_0 t, q = p_1 t$ ergibt sich

$$A_p = A_{p_0 p_1} = \begin{pmatrix} z_c + 1 + at & 1 & 0 & -1 \\ 1 & z_c + 1 + bt & 1 & 0 \\ 0 & 1 & z_c + 1 + a^*t & 1 \\ -1 & 0 & 1 & z_c + 1 + b^*t \end{pmatrix} \quad (3.46)$$

mit

$$\begin{aligned} a &= -z_c k \left(\frac{\mu + \mu'}{2} - i p_0 \right) \\ b &= -z_c \left(\frac{\mu - \mu'}{2} - i p_1 \right) \end{aligned} \quad (3.47)$$

wobei die Bezeichnungen in Anhang B erläutert werden.

Wir wollen nun für den symmetrischen Fall $z_1 = z_2 = z$ die Wirkung diagonalisieren. Es wird sich zeigen, daß dies von einer unitären Matrix geleistet wird.

Die Matrix (3.46) hat folgende vier Eigenwerte (im Skalenlimes zweifach entartet)

$$\begin{aligned} \lambda_{2,4} &= - \left(\mu \pm i \sqrt{p_0^2 + p_1^2} \right) \frac{z_c t}{2} + O(t^2) \\ \lambda_{1,3} &= 2(z_c + 1) - \left(\mu \pm i \sqrt{p_0^2 + p_1^2} \right) \frac{z_c t}{2} + O(t^2) \end{aligned} \quad (3.48)$$

$$z_c = \sqrt{2} - 1 \quad (3.49)$$

Die Berechnung der zugehörigen Eigenvektoren $\vec{u}_i$ ergibt die diagonalisierende Matrix $U_p = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4)$:

$$U_p = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos \varphi_+ & \sin \theta_+ & -\sin \varphi_+ & \cos \theta_+ \\ \cos \varphi_- & -\cos \theta_- & \sin \varphi_- & -\sin \theta_- \\ \cos \varphi_- & \cos \theta_- & \sin \varphi_- & \sin \theta_- \\ \cos \varphi_+ & -\sin \theta_+ & -\sin \varphi_+ & -\cos \theta_+ \end{pmatrix} \quad (3.50)$$

Dabei sind die Winkel $\varphi_{\pm}$ und $\theta_{\pm}$ gegeben durch:

$$\cos \varphi_{\pm} := \frac{\sqrt{2} p_1}{2\sqrt{r^2 \pm p_0 r}} \quad (3.51a)$$

$$\cos \theta_{\pm} := \frac{r \pm p_0 + p_1}{2\sqrt{r^2 \pm p_0 r}} \quad (3.51b)$$

mit $r = \sqrt{p_0^2 + p_1^2}$

Eine einfache Rechnung zeigt, daß A_p durch U_p diagonalisiert wird:

$$\Lambda := \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & & \\ 0 & \lambda_2 & \sigma & \\ & & \lambda_3 & 0 \\ \sigma & & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix} = U_p A_p U_p^+ \quad (3.52)$$

Führen wir die rotierten Graßmannvariablen $\tilde{\Psi}$ ein

$$\tilde{\Psi}_p = \begin{pmatrix} \psi_{pq}^{(1)} \\ \psi_{pq}^{(2)} \\ \psi_{-p-q}^{(1)} \\ \psi_{-p-q}^{(2)} \end{pmatrix} = U_{pq} \begin{pmatrix} x_{pq} \\ y_{pq} \\ x_{-p-q} \\ y_{-p-q} \end{pmatrix} \quad (3.53)$$

so haben wir für die Wirkung schließlich

$$S = \sum_{\mathbf{BI}} \tilde{\Psi}_p^+ \Lambda \tilde{\Psi}_p = \sum_{\mathbf{BI}} \psi_p^+ \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \psi_p + \psi_{-p}^+ \begin{pmatrix} \lambda_3 & 0 \\ 0 & \lambda_4 \end{pmatrix} \psi_{-p} \quad (3.54)$$

mit
$$\psi_p = \begin{pmatrix} \psi_{pq}^{(1)} \\ \psi_{pq}^{(2)} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \psi_{-p} = \begin{pmatrix} \psi_{-p-q}^{(1)} \\ \psi_{-p-q}^{(2)} \end{pmatrix} \quad (3.55)$$

Es ist uns gelungen, die positiven und negativen Energie- (p_0) anteile in der Wirkung zu separieren. Die Integration über die negativen Impulskomponenten, d.h. über den zweiten Teil der Wirkung (3.54) ergibt eine Normierungskonstante $\tilde{N}$.

$$\tilde{N} = (2\sqrt{2})^{NM} \left(1 - \frac{\sqrt{2}-1}{8\sqrt{2}} \mu t NM \right) \quad (3.56)$$

Diese im Skalenlimes unendliche Konstante ergibt einen konstanten Beitrag zur Wirkung und kann als Energieverschiebung interpretiert werden. In einer konventionellen Feldtheorie ist diese Divergenz unter dem Namen Nullpunktsenergie bekannt und wird im allgemeinen in einem Operatorformalismus durch Normalordnung eliminiert. Für die Zustandssumme der restlichen Freiheitsgrade ergibt sich

$$Z = \int \prod_{p \in \mathbb{B}\mathbb{I}} d\psi_p d\psi_p^+ e^{\sum_{\mathbb{B}\mathbb{I}} \psi_p^+ \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \psi_p} \quad (3.57)$$

Um zur üblichen Darstellung eines Majoranafeldes im Funktionalintegral zu kommen, führen wir für die unabhängigen Variablen ψ_p^* neue Variablen ψ_{-p} ein:

$$\psi_p^{\alpha*} \longrightarrow \psi_{-p}^{\alpha} \quad (3.58)$$

Die Form (3.57) der Zustandssumme geht damit über in:

$$Z = \int \prod_{p \in \mathbb{B}\mathbb{I}} d\psi_p d\psi_{-p} e^{\sum_{\mathbb{B}\mathbb{I}} \psi_{-p}^T \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \psi_p} \quad (3.59)$$

Wir wollen diese Form der Zustandssumme des Isingmodells im Skalenlimes vergleichen mit dem erzeugenden Funktional eines Majoranafelds $\hat{\psi}(x)$.

Ladungskonjugation in einer 2-komponentigen Diracgleichung liefert

$$\hat{\psi}_c(x) = C \gamma^0 \hat{\psi}^*(x), \quad (3.60)$$

falls die Matrix C durch die Konjugationsbedingung

$$(C \gamma^0) (\gamma^\mu)^* (C \gamma^0)^{-1} = -\gamma^\mu \quad (3.61)$$

definiert ist.

Für ein Majoranafeld in der Darstellung (2.40) (Minkowskimetrik) ergibt sich

$$\hat{\psi}_c(x) \stackrel{\uparrow}{=} \hat{\psi}^*(x) \stackrel{\uparrow}{=} \hat{\psi}(x) \quad (3.62)$$

(2.40) Majorana-
bedingung

Im Impulsraum ist die Majoranabedingung

$$\hat{\psi}_p^* = \hat{\psi}_{-p} \quad (3.63)$$

Das erzeugende Funktional für das Majoranafeld in Impulskomponenten ist durch (3.63)

$$Z = \int \prod_{p>0} d\hat{\psi}_p d\hat{\psi}_{-p} e^{2i \sum_{p \in \mathbb{N}} \hat{\psi}_{-p}^\top \gamma^0(p+\mu) \hat{\psi}_p} \quad (3.64)$$

mit

$$\gamma^0(p+\mu) = \begin{pmatrix} p_0 & p_1 + i\mu \\ p_1 - i\mu & p_0 \end{pmatrix} = A_{\text{Mink}} \quad (3.65)$$

gegeben.

Im Ortsraum gilt mit $\hat{\psi}_c^1(x) = \chi^+(x) + \chi(x)$, $\hat{\psi}^2 = -i(\chi^+(x) - \chi(x))$

$$Z = \int \prod_x d\hat{\psi}(x) e^{i \int d^2x \hat{\psi}_c^\top(x) \gamma^0(i\phi + \mu) \hat{\psi}(x)} \quad (3.66)$$

$$= 2^{NM} \int \prod_x d\chi(x) d\chi^+(x) e^{4i \int d^2x [\chi^+(i\partial_t - \mu)\chi + \frac{1}{2}(\chi^+ + \chi)\partial_x(\chi^+ - \chi)]} \quad (3.67)$$

Die letzte Form wird im nächsten Abschnitt benötigt.

Es gibt eine reelle Matrix M , die die euklidische Version von (3.64) in (3.59) überführt

$$M^T A_{\text{Eukl}} M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad (3.68)$$

Der Faktor vor den Eigenwerten λ_i , nämlich $\frac{z_c t}{2}$, kann in die neuen renormierten Felder $\hat{\psi}_p$ absorbiert werden.

$$\hat{\psi}_p = \frac{\sqrt{z_c |t|}}{2} M \psi_p \quad (3.69)$$

Die Wirkung in (3.59) ist proportional zum "Cutoff"-Parameter t . Diese Abhängigkeit vom "Cutoff" kann durch (3.69) in die Renormierungskonstante zwischen dem nackten Feld ψ_p und dem renormierten Feld $\hat{\psi}_p$ gesteckt werden.

In der Feldtheorie ist dies als Wellenfunktionsrenormierung bekannt. Der einzige Effekt dieser Skalierung besteht darin, daß das Funktionalmaß einen weiteren Faktor

$$\tilde{N} = \left(\frac{z_c^2 t^2}{16} \right)^{\frac{NM}{2}} \quad (3.70)$$

erhält. Wie in Kapitel 2 haben wir den Faktor $\sqrt{|t|}$, der den kritischen Exponenten $\frac{1}{2}$ für das Majoranafeld bestimmt.

Wir haben damit gesehen, daß das Isingmodell in der Nähe der kritischen Temperatur Wellenfunktionsrenormierung erlaubt. Die zusätzliche Konstante $N = \tilde{N}N$, die die Zustandssumme des Majoranafeldes (3.64) mit der Zustandssumme des Isingmodells im Skalenlimes verbindet, kann als Energieverschiebung interpretiert werden.

Wir haben außerdem im Verlauf der Rechnung gesehen, daß die Hälfte der vier reellen Freiheitsgrade x, y, x^+, y^+ , von denen wir ausgegangen sind, irrelevant werden. Die negativen Impulskomponenten ψ_{-p}^α in (3.54)

sind sozusagen wegen des konstanten Beitrags in λ_3 bzw. λ_4 eingefroren. Sie spielen in einer renormierten Theorie wegen des durch diesen Beitrag unendlichen Massenterms im Propagator

$$\sim \sigma\left(\frac{1}{t}\right) \quad (3.71)$$

keine Rolle. Die Freiheitsgrade ψ_{-p}^α von (3.54) sind somit im Skalenlimes keine dynamischen Freiheitsgrade mehr. Dies ist ein schönes Beispiel dafür, wie im Skalenlimes gewisse Variablen aussterben können und nicht als Felder in Erscheinung treten.

Nehmen wir in (3.64) den thermodynamischen Limes und transformieren zurück in den Ortsraum, so ergibt sich

$$\mathcal{L}_{\text{Maj.}}[\psi(x)] = \bar{\psi}(x)(i\partial + \mu)\psi(x) \quad (3.72)$$

und damit

$$Z_{\text{ising}} \xrightarrow{\text{Skalenlimes}} \int N \int \prod_p d\psi_p e^{i \int d^2x \mathcal{L}_{\text{Maj.}}[\psi(x)]} \quad (3.73)$$

Wir haben also auf dem Umweg über den Impulsraum gezeigt, daß die Graßmann-Wirkung im Skalenlimes durch die Majorana-Lagrangedichte beschrieben wird.

Bei der Ableitung wurde darauf geachtet, daß es bei Variablentransformationen immer eine zugehörige nichtsinguläre Matrix gibt (wie z.B. M und K), so daß obige Argumentation auch auf Propagatoren angewandt werden kann und nicht nur für die Zustandssumme gilt, die ja nur eine reine Normierungskonstante liefert.

Im nächsten Abschnitt wird diese Äquivalenz direkt im Ortsraum gezeigt, in dem wir die Hälfte der Graßmann-Freiheitsgrade ausintegrieren.

6. Skalenlimes in der Ortsraumdarstellung der Wirkung

In diesem Abschnitt wollen wir, ausgehend von der Wirkung im Ortsraum (3.20), den Skalenlimes durchführen.

Zu diesem Zweck werden zuerst die y -Freiheitsgrade ausintegriert. In

der so entstehenden effektiven Wirkung in den x -Freiheitsgraden, die die Theorie ebenso gut beschreibt, wollen wir eine Näherung ausführen, die im Skalenlimes exakt wird, nämlich

$$\begin{aligned} x_{ij+\alpha} - x_{ij} &\approx \alpha (x_{ij+1} - x_{ij}) := \alpha \delta_j x \\ x_{ij+\alpha}^+ - x_{ij}^+ &\approx \alpha (x_{ij+1}^+ - x_{ij}^+) := \alpha \delta_j x^+ \end{aligned} \quad (3.74)$$

Diese Näherung ist eine Art Differenzierbarkeitsbedingung an die Integrationsvariable, die im Skalenlimes wegen Gitterabstand $a \rightarrow 0$ sehr gut erfüllt ist.

Wichtig dabei ist die Tatsache, daß mit größerem α aufgrund eines Faktors $(z_2)^\alpha$ (siehe (3.81)) die Terme in (3.74) exponentiell gedämpft werden, da $z_2 \approx z_2^c = \text{th} \frac{x_{2c}}{2} < 1$, d.h. $\ln z_2 < 0$.

Es wird also

$$z_2^\alpha \sim e^{\ln z_2 \alpha} \text{ exp. gedämpft} \quad (3.75)$$

Die Wirkung (3.20) für den Fall des Isingmodells $a_i = b_i = 1$ ist

$$\begin{aligned} S = \sum_{ij} \left[\gamma_{ij}^+ H_{ij,ke} \gamma_{ke} + (x_{ij} + x_{ij}^+) \gamma_{ij} + \gamma_{ij}^+ (x_{ij} - x_{ij}^+) + \right. \\ \left. + z_1 x_{ij}^+ x_{i+1,j} + x_{ij}^+ x_{ij} \right] \end{aligned} \quad (3.76)$$

$$\text{mit } H_{ij,ke} = \delta_{ij} (z_2 \delta_{i+1,e} + \delta_{ie}) \quad (3.77)$$

Die Integration über die y -Variable liefert

$$e^{S_{\text{eff}}(x, x^+)} = \det H e^{-(x+x^+)_{ij} H_{ij, nm}^{-1} (x-x^+)_{nm} + z_1 x_{ij}^+ x_{i+1,j} + x_{ij}^+ x_{ij}} \quad (3.78)$$

$H_{ij,ke}$ läßt sich leicht invertieren.

$$H_{ij, nm}^{-1} = \delta_{in} \sum_{\alpha=0}^{\infty} (-z_2)^\alpha \delta_{j+\alpha, m} \quad (3.79)$$

Die Summation über α kann durchgeführt werden. Mit

$$\sum_{\alpha=1}^{\infty} (-z_2)^\alpha = \frac{-z_2}{1+z_2} \quad (3.83)$$

bzw.
$$\sum_{\alpha=1}^{\infty} \alpha (-z_2)^\alpha = \frac{z_2}{(1+z_2)^2} \quad (3.84)$$

ergibt sich eine lokale effektive Wirkung

$$S_{\text{eff}} = \sum_{ij} \left(z_1 - 1 + \frac{\lambda z_2}{1+z_2} \right) x^+ x + z_1 x^+ \delta_i x + \frac{z_2}{(1+z_2)^2} (x^+ + x) \delta_j (x^+ - x) \quad (3.85)$$

Für x, x^+ ist immer x_{ij}, x_{ij}^+ zu lesen.

Nun können wir den Skalenlimes durchführen. Mit den Entwicklungen (B4) bzw. (B5) um $|t| \ll 1$ gilt:

$$S_{\text{eff}}(|t| \ll 1) = z_{1c} k t \sum_{ij} x^+ \partial_t x - \mu x^+ x + \frac{1}{2} (x^+ + x) \partial_x (x^+ - x) \quad (3.86)$$

Dabei wurde berücksichtigt, daß

$$\partial_t = \frac{\delta_i}{k t} ; \quad \partial_x = \frac{\delta_j}{t} \quad (3.87)$$

$$z_1 z_2 + z_1 + z_2 - 1 = -\mu \frac{2\sqrt{\alpha}}{(1+\sqrt{\alpha})} t + \mathcal{O}(t^2) \quad (3.88)$$

mit $k = \frac{2\sqrt{\alpha}}{1-\sqrt{\alpha}} ; \quad \alpha = e^{-2x_{1c}} ; \quad \mu = x_{1c} + \frac{x_{2c}}{\text{sh } x_{2c}} \quad (3.89)$

gilt.

Wir sehen, daß die Wirkung proportional zum Skalenparameter t ist. Für $k = 1$ können wir die effektive Wirkung in (3.85) vergleichen mit der Wirkung eines Majoranafeldes aus dem vorigen Abschnitt (3.67). Wir erkennen, daß die renormierten Variablen $\chi(x)$ mit unseren Gittervariablen durch

$$\chi(x) = \frac{\sqrt{z_c t}}{2} x_{ij} \quad (3.90)$$

verbunden sind.

Im nächsten Abschnitt wollen wir den Zusammenhang unserer so abgeleiteten effektiven Wirkung mit den Fermionoperatoren des Kap. 2 zeigen. Dazu

gehen wir von der Wirkung

$$S_{\text{eff}} = z_1 k t \sum_j x^+ (\partial_t - \mu) x + \frac{1}{2} (x^+ \partial_x x^+ - x \partial_x x) \quad (3.91)$$

aus. Diese Wirkung ist wegen

$$x \partial_x x^+ - x^+ \partial_x x \sim t (x^+ \partial_x x^+ - x \partial_x x) \quad (3.92)$$

im Skalenlimes der Wirkung (3.86) äquivalent.

7. Übergang von der Hamilton- zur Lagrangedichtenbeschreibung

In diesem Abschnitt soll der Zusammenhang zwischen der Darstellung der Theorie durch Graßmannvariable x, x^+, y, y^+ und der Darstellung durch Fermi-Operatoren c_j, c_j^+ (in (2.24)) im Hamiltonformalismus aufgezeigt werden.

Da es bisher nicht gelungen ist, diesen Übergang in expliziter Weise für das allgemeine Isingmodell (t beliebig) abzuleiten, soll hier die Theorie im Skalenlimes behandelt werden (d.h. $t \ll 1$).

Im untenstehenden Diagramm läßt sich die Äquivalenz der Beschreibungen der Zustandssumme durch (2.29) und (3.20) so darstellen:

$$Z = \text{tr} (V_1^1 V_2^1 V_1^1)^N \quad (3.93)$$

$V_\alpha = V_\alpha(c_j); \alpha = 1, 2$

c_j Fermioperatoren $j = 1, \dots, M$

Operator-
oder Hamilton-
formalismus

Einschieben $\Downarrow$ von Zwischenzuständen in (3.93)

$$Z = \int dy dy^+ dx dx^+ e^S \quad (3.94)$$

$S = S(x_{ij}, x_{ij}^+, y_{ij}, y_{ij}^+)$ nach (3.20)

x, x^+, y, y^+ Graßmannzahlen

$i = 1 \dots N \hat{=} \text{Zeitindex}$

$j = 1 \dots M \hat{=} \text{Raumindex}$

Funktional-
oder Lagrange-
formalismus

a) Ein effektiver Hamiltonoperator H

Die in Kapitel 2.4 abgeleiteten Bewegungsgleichungen für die Fermionen c_j, c_j^+ (siehe 2.35) lassen sich durch folgenden Hamiltonoperator mit der Heisenbergschen Bewegungsgleichung identifizieren

$$\delta_\tau c_j = [\tilde{H}, c_j] \quad (3.95)$$

$$\tilde{H} = \sum_j (x_2 - 2u_1) c_j^+ c_j + \frac{\hbar x_2}{2} (c_{j+1} c_j + c_j^+ c_{j+1}^+) \quad (3.96)$$

Der nichtlokale exakte Hamiltonoperator, bestimmt durch

$$V = e^H = e^{\frac{1}{2}H_1} e^{H_2} e^{\frac{1}{2}H_1} \quad (3.97)$$

läßt sich also durch den lokalen Hamiltonoperator $\tilde{H}$ ersetzen, falls man den Gitterabstand $a, \tau \rightarrow 0$ und $t \rightarrow 0$ betrachtet. Die Näherungen sind explizit

$$\begin{aligned} 1.) \quad (x_2 - 2u_1)^2 &= \sigma(t^2) && \text{vernachlässigt} \\ 2.) \quad \delta c_j &= c_{j+1} - c_j \sim t = a && \text{Gitterabstand} \\ 3.) \quad \delta c_j - \delta c_{j-1} &\sim t^2 && \text{vernachlässigt} \end{aligned} \quad (3.98)$$

Man verifiziert damit leicht die Feldgleichungen (3.39) mit Hilfe von (3.95) und (3.96).

Eine direkte Ableitung von $\tilde{H}$ aus der Gleichung (3.97), d.h. aus der Baker-Campbell-Hausdorff-Formel [34]

$$H = H_1 + H_2 + \frac{1}{12} [[H_1, H_2], H_2] + \frac{1}{24} [[H_1, H_2], H_1] + \sigma(H_i^5) \quad (3.99)$$

sollte auch möglich sein, wird aber hier nicht versucht. Wir stellen fest, daß der Hamiltonoperator $\tilde{H}$ aus (3.96) proportional zum Skalenparameter t ist. Diese Eigenschaft ist aus der Form (3.99) nicht ohne weiteres zu sehen. Will man die Form (3.99) als gute Störungsentwicklung benutzen, so gelingt dies leicht, wenn man verlangt, daß H_1 und H_2 proportional zu τ , dem zeitlichen Gitterabstand, ist. Da $\tau \ll 1$ im Zeitkontinuuumlimites, folgt aus (3.99)

$$H = H_1 + H_2 + O(t^2) \quad (3.100)$$

Dieser einseitige Skalenlimes [36], den man wegen dieser Näherung durchführen muß, ist durch $z_1 \rightarrow 0$ bestimmt (siehe Kap. 2.5, Bemerkung 4). Da in diesem sogenannten τ -Kontinuuumlimes die Maßzahl der Lichtgeschwindigkeit mitskaliert werden muß, wollen wir im weiteren immer unsere Form (3.96) verwenden. Im Skalenlimes gilt (siehe (2.50), (B9))

$$\tilde{H} = \tau \sum_j \left[-\mu c_j^\dagger c_j + \frac{1}{2a} (c_{j+1} c_j + c_j^\dagger c_{j+1}^\dagger) \right] \quad (3.101)$$

mit den Gitterabständen $\tau = kt$, $a = t$.

Diese Form des Hamiltonoperators wollen wir benützen, um die Wirkung (3.91) durch Einschieben von Zwischenzuständen abzuleiten.

b) Kohärente Zustände für Fermionen

Als Zwischenzustände im Ausdruck

$$Z = \text{tr} \left(e^{\tilde{H}} \right)^N \quad (3.102)$$

benützen wir kohärente Zustände, also Eigenzustände des Vernichters c_j , um die Wirkung (3.91) abzuleiten.

Das Fockvakuum $|0\rangle$, also nicht der Grundzustand, d.h. der niedrigste Energiezustand von $\tilde{H}$, wird nach Definition von c_j (für alle j) vernichtet.

$$c_j |0\rangle = 0 \quad \forall j \quad (3.103)$$

Wir definieren die kohärenten Zustände

$$\begin{aligned} |x_{ij}\rangle &= e^{g c_j^\dagger x_{ij}} |0\rangle \\ \langle x_{ij}| &= \langle 0| e^{g x_{ij}^\dagger c_j} \end{aligned} \quad (3.104)$$

Die reelle Konstante g wird noch angepaßt werden. Die Variablen x_{ij} , x_{ij}^+

sind Graßmannzahlen. Die Eigenwertbedingung ist:

$$\begin{aligned} c_j |x_{ij}\rangle &= g x_{ij} |x_{ij}\rangle \\ \langle x_{ij} | c_j^\dagger &= \langle x_{ij} | g x_{ij}^\dagger \end{aligned} \quad (3.105)$$

Diese Zustände sind nicht orthonormiert. Es gilt

$$\langle x_{ij} | x_{ek} \rangle = e^{g^2 x_{ij}^\dagger x_{ke}} \delta_{je} \quad (3.106)$$

Als Zwischenzustände benutzen wir die Produktzustände

$$|i\rangle = \prod_j |x_{ij}\rangle \quad \text{bzw.} \quad \langle k| = \prod_e \langle x_{ke}| \quad (3.107)$$

mit der Normierung

$$\langle k|i\rangle = e^{g^2 \sum_j x_{kj}^\dagger x_{ij}} \quad (3.108)$$

Die Übervollständigkeit dieser Zustände mit festen i drückt sich in folgender Beziehung aus:

$$\int \prod_j dx_{ij} dx_{ij}^\dagger |x_{ij}\rangle \langle x_{ij}| e^{-g^2 \sum_j x_{ij}^\dagger x_{ij}} = 1 \quad (3.109)$$

Wir berechnen nun das Matrixelement

$$\begin{aligned} \langle i | e^{\tilde{H}} | i+1 \rangle &= \langle i | i+1 \rangle + \langle i | \tilde{H} | i+1 \rangle + \mathcal{O}(\tau^2) \\ &= e^{g^2 \sum_j x_{ij}^\dagger x_{i+1,j}} + \tau g^2 \sum_j \left[-\mu x_{ij}^\dagger x_{i+1,j} + \frac{1}{2a} (x_{i+1,j+1} x_{i+1,j} + x_{ij}^\dagger x_{i+1,j+1}^\dagger) \right] \end{aligned} \quad (3.110)$$

Die Zustandssumme wird damit:

$$\begin{aligned} Z &= \int \prod_{ij} dx_{ij} dx_{ij}^\dagger \left\{ 1 + \tau g^2 \sum_{ij} x_{ij}^\dagger \left(\frac{x_{i+1,j} - x_{ij}}{\tau} \right) - \mu x_{ij}^\dagger x_{ij} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left[x_{ij}^\dagger \left(\frac{x_{i+1,j+1}^\dagger - x_{ij}^\dagger}{a} \right) - x_{ij} \left(\frac{x_{i+1,j+1} - x_{ij}}{a} \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.111)$$

Falls wir $z_1 = g^2$ setzen und den τg^2 -Term in (3.111) in den Exponenten schreiben, ergibt sich die Wirkung (3.91).

Wir haben also gezeigt, daß im Skalenlimes die Wirkung

$$S = z_1 \tau \sum_{ij} x^+ (\partial_\tau - \mu) x + \frac{1}{2} (x^+ \partial_x x^+ - x \partial_x x) \quad (3.112)$$

dem Hamiltonoperator

$$H = \tau \sum_j -\mu c_j^+ c_j + \frac{1}{2a} (c_{j+1} c_j + c_j^+ c_{j+1}^+) \quad (3.113)$$

entspricht. Die Zustände, die eingeschoben werden müssen, sind Produktzustände und werden durch die "Zeit" i parametrisiert

$$|i\rangle = \prod_j (e^{\sqrt{z_1} c_j^+ x_{ij}} |0\rangle) \quad (3.114)$$

4. Kapitel

Zweipunktfunktionen in der Ising-Feldtheorie

In diesem Kapitel sollen die Korrelationen der Spinvariable, d.h. des Ordnungsparameters σ_{ij} und der dazu dualen Variablen, d.h. des Unordnungsparameters μ_{ij} diskutiert werden. Der Begriff Ordnungs- bzw. Unordnungsparameter wird in Kap. 5.1 näher erläutert. Die Berechnung der beiden Korrelationen erfolgt mit Hilfe der in Kapitel 3 eingeführten Graßmannvariablen $x_{ij}, y_{ij}, x_{ij}^+, y_{ij}^+$.

Im Skalenlimes werden diese Korrelationsfunktionen zu Propagatoren wechselwirkender Felder. Wie bei der Bestimmung der Majorana-Lagrangedichte im vorigen Kapitel spielt dabei die Renormierung der Felder eine wichtige Rolle.

Wir werden sehen, daß das Verhalten bei kleinen Abständen nicht durch die eingeprägte Dimension der Felder bestimmt wird (anomale Dimension). Auch im Verhalten für große Abstände tritt neben dem Propagator mit einem Pol bei der Masse μ ein unkonventioneller mit Verzweigungspunkt bei 2μ auf [40,49].

1. Darstellung der Korrelationsfunktionen $\langle \sigma_{oo} \sigma_{ij} \rangle$ und $\langle \mu_{oo} \mu_{ij} \rangle$ durch freie Propagatoren

In diesem Abschnitt wollen wir eine Darstellung der Zweipunktfunktionen durch fermionische Variable angeben. Sie resultiert aus einer, die beiden Achsen des Gitters gleichbehandelnden, Beschreibung von Korrelationen und ist als eine Erweiterung der Betrachtungen über die Zustandssumme in fermionischen Variablen zu sehen (siehe Kap. 3.4). Eine mehr an den Hamilton'schen Operatorformalismus orientierte Berechnung der Korrelationen wurde von Abraham [51] angegeben. Die Rolle der fermionischen Hilfsvariablen, d.h. unseres Basisfeldes, wird aber in einer Lagrangeformulierung transparenter.

Die Berechnung erfolgt in vier Stufen.

Als ersten Schritt wollen wir die Zweipunktfunktion $\langle \sigma_{oo} \sigma_{ij} \rangle$ als Zustandssumme einer etwas abgeänderten Theorie beschreiben [50]. Dazu betrachten wir einen beliebigen Weg Γ von (o,o) bis (i,j) , wie z.B. den in Fig. 4.1 eingezeichneten.

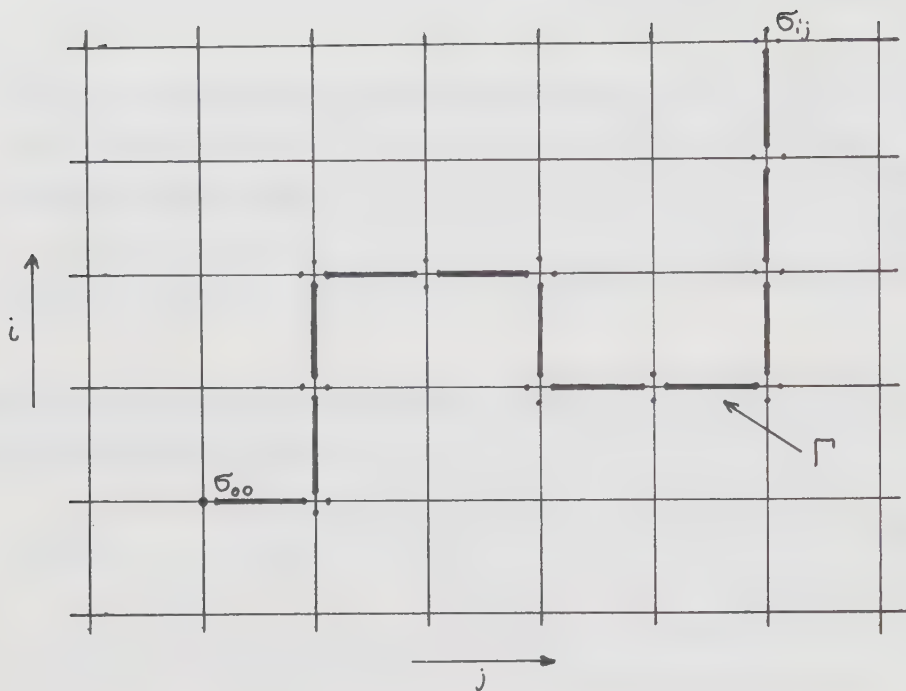


Fig. 4.1 Korrelationen $\langle \sigma_{00} \sigma_{ij} \rangle$ als Zustandssumme eines defekten Gitter.
Auf dem Weg Γ werden die Kopplungen invertiert $z_i \rightarrow \frac{1}{z_i}$.

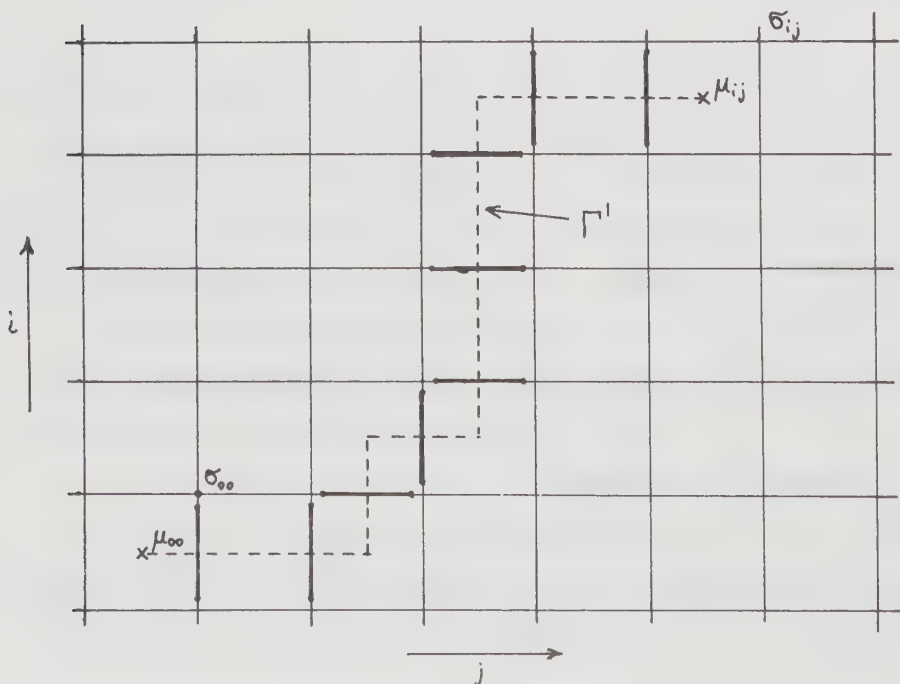


Fig. 4.2 Korrelationen $\langle \mu_{00} \mu_{ij} \rangle$ als Zustandssumme eines defekten Gitter.
Auf dem Weg Γ' werden die Kopplungen umgedreht $z_i \rightarrow -z_i$.

Wir zeigen nun, daß die Korrelationsfunktionen, definiert durch

$$\langle \sigma_{00} \sigma_{ij} \rangle = \frac{1}{Z} \sum_{\{\sigma\}} \sigma_{00} \sigma_{ij} e^S \quad (4.1)$$

durch eine Zustandssumme ausdrückbar ist, in der längs eines Weges Γ von $(0,0)$ bis (i,j) die Kopplungen z_i durch $\frac{1}{z_i}$ ersetzt werden.

Es gilt

$$\sigma_{00} \sigma_{ij} = (\sigma_{00} \sigma_{01}) (\sigma_{01} \sigma_{02}) \dots (\sigma_{ij-1} \sigma_{ij}) , \quad (4.2)$$

da die Zwischenpunkte längs des Weges Γ jeweils zweimal vorkommen und

$$\sigma_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta} = 1 \quad (4.3)$$

ist.

Wegen
$$\sigma_{ij} \sigma_{kl} (1 + z_\alpha \sigma_{ij} \sigma_{kl}) = z_\alpha (1 + \frac{1}{z_\alpha} \sigma_{ij} \sigma_{kl}) \quad (4.4)$$

und der Form (3.3) von e^S folgt

$$Z \langle \sigma_{00} \sigma_{ij} \rangle = \left(\cosh \frac{x_1}{2} \cosh \frac{x_2}{2} \right)^{NM} z_1^i z_2^j \sum_{\{\sigma\}} \prod_{\vec{n}, \alpha} (1 + \xi_\alpha \sigma_{\vec{n}} \sigma_{\vec{n}+\vec{e}_\alpha}) \quad (4.5)$$

mit
$$\xi_\alpha = \frac{1}{z_\alpha} \quad \text{falls} \quad \sigma_{\vec{n}} \sigma_{\vec{n}+\vec{e}_\alpha} \quad \text{auf dem Weg } \Gamma \quad (4.6a)$$

$$\xi_\alpha = z_\alpha \quad \text{sonst} \quad (4.6b)$$

$\alpha = 1$ gilt für "bonds" in Zeitrichtung, $\alpha = 2$ in Ortsrichtung. Das nach (4.6) abgeänderte Modell bezeichnen wir als Ising-Modell eines Γ -defekten Gitters. Seine Zustandssumme sei $Z_{\text{Ising}}^{(\Gamma)}$.

Die Korrelationsfunktion wird damit

$$\langle \sigma_{00} \sigma_{ij} \rangle = \frac{Z_{\text{Ising}}^{(\Gamma)}}{Z_{\text{Ising}}} \quad (4.7)$$

Es läßt sich ein Isingmodell definieren, das längs des Weges Γ komplexe Kopplungen besitzt (damit wird $z_\alpha \xrightarrow{\Gamma} \frac{1}{z_\alpha}$)

$$x_\alpha \xrightarrow{\text{längs des Weges } \Gamma} x_\alpha + i\pi \quad (4.8)$$

und obige Zustandssumme besitzt.

Als zweiten Schritt wollen wir eine fermionische Darstellung von $Z_{\text{Ising}}^{(r)}$ angeben. Das in Kap. 3.3 über Graßmannintegrale gesagte gilt auch für $Z_{\text{graph}}^{(r)}$, d.h.

$$\langle \sigma_{i_0} \sigma_{i_j} \rangle = \left(2 \operatorname{ch} \frac{x_1}{2} \operatorname{ch} \frac{x_2}{2} \right)^{NM} z_1^i z_2^j Z_{\text{graph}}^{(r)} \quad (4.9)$$

mit

$$Z_{\text{graph}}^{(r)} = \int \prod_{ij} dx_{ij} dx_{ij}^+ d\gamma_{ij} d\gamma_{ij}^+ e^{S(x, x^+, \gamma, \gamma^+) + \sum_{\alpha} \left(\frac{1}{z_{\alpha}} - z_{\alpha} \right) b_{\alpha}} \quad (4.10)$$

wobei S die ursprüngliche Wirkung (3.20) des Isingmodells ist. In (4.10) wurde für die Wegelemente (z_{α} -Dimer) von der folgenden Relation Gebrauch gemacht.

$$1 + \frac{1}{z_{\alpha}} b_{\alpha} = \left(1 + z_{\alpha} b_{\alpha} \right) \left(1 + \left(\frac{1}{z_{\alpha}} - z_{\alpha} \right) b_{\alpha} \right) \quad (4.11)$$

wobei die Größe b_{α} für die z_{α} -Dimer steht:

$$\begin{aligned} \alpha = 1 & \quad b_{\alpha} = x_{ij}^+ x_{i+1,j} \\ \alpha = 2 & \quad b_{\alpha} = \gamma_{ij}^+ \gamma_{i,j+1} \end{aligned} \quad (4.12)$$

In der fermionischen Schreibweise ist also die Zweipunktfunktion der Erwartungswert eines pfadgeordneten Exponentials

$$\langle \sigma_{i_0} \sigma_{i_j} \rangle = z_1^i z_2^j \left\langle e^{\sum_{\alpha} \left(\frac{1}{z_{\alpha}} - z_{\alpha} \right) b_{\alpha}} \right\rangle \quad (4.13)$$

Da der Exponent bilinear in den Graßmannvariablen ist, kann die Korrelationsfunktion durch Gauß'sche Integration berechnet werden. Diese Eigenschaft von Spin-Spin-Korrelationen - nämlich in fermionischer Sprache einem Gaußterm ($\propto e^{\psi^+ \psi}$) zu entsprechen - ist auch in höheren Dimensionen, z.B. $d = 3, 4$ richtig. Damit können Korrelationen ebenso wie die Zustandssumme exakt berechnet werden. Voraussetzung ist natürlich, daß auch die fermionische Wirkung S bilinear ist. Leider ist es bisher nicht gelungen, eine solche für das Isingmodell für $d > 2$ anzugeben.

Als dritten Schritt wollen wir zeigen, daß die fermionische Schreibweise (4.13) in natürlicher Weise auf die Theorie von zyklischen Determinanten [48] führt. Um die Formeln nicht unnötig mit Indexballast zu versehen, betrachten wir Korrelationen längs einer geraden Linie, z.B. der x-Achse.

$$\langle \sigma_{00} \sigma_{0n} \rangle = z_2^n \left\langle \exp \left\{ \sum_{\alpha=0}^{n-1} \left(\frac{1}{z_2} - z_2 \right) \gamma_{0\alpha}^+ \gamma_{0\alpha+1} \right\} \right\rangle \quad (4.14)$$

Die Entwicklung der Exponentialfunktion führt auf Terme der folgenden Art:

$$\left\langle \gamma_{0\alpha_1}^+ \gamma_{0\alpha_1+1} \gamma_{0\alpha_2}^+ \gamma_{0\alpha_2+1} \cdots \gamma_{0\alpha_k}^+ \gamma_{0\alpha_k+1} \right\rangle \quad (4.15)$$

mit $1 \leq k \leq n$ und verschiedenen α_i .

Da die Korrelationen $\langle \gamma_{0\alpha} \gamma_{0\beta} \rangle$ und $\langle \gamma_{0\alpha}^+ \gamma_{0\beta}^+ \rangle$ für beliebige α, β verschwinden, was im Anhang C gezeigt wird, gilt

$$\langle \gamma_{00}^+ \gamma_{01} \gamma_{01}^+ \gamma_{02} \cdots \gamma_{0n-1}^+ \gamma_n \rangle = \det D_{ek}^{(n)} \quad (4.16)$$

$$\text{mit } D_{ek}^{(n)} = \langle \gamma_{0k-1}^+ \gamma_{0e} \rangle = \begin{pmatrix} \langle \gamma_{00}^+ \gamma_{01} \rangle & \langle \gamma_{01}^+ \gamma_{01} \rangle & \cdots & \langle \gamma_{0n-1}^+ \gamma_{01} \rangle \\ \langle \gamma_{00}^+ \gamma_{02} \rangle & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ \langle \gamma_{00}^+ \gamma_{0n} \rangle & \cdots & \langle \gamma_{0n-1}^+ \gamma_{0n} \rangle \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

Die Fermi-Propagatoren $\langle \gamma_{0\alpha}^+ \gamma_{0\beta} \rangle$ werden im Anhang C berechnet. Die Beziehung (4.16) wird am besten durch Einführung von Quellen nach Schwinger [52] gezeigt. Sie ist nichts anderes als das aus der Feldtheorie bekannte Wicktheorem für freie Fermionen. Für die 4-Punktfunktion ist z.B.

$$\begin{aligned} \langle \gamma_{00}^+ \gamma_{01} \gamma_{01}^+ \gamma_{02} \rangle &= \langle \gamma_{00}^+ \gamma_{01} \rangle \langle \gamma_{01}^+ \gamma_{02} \rangle - \langle \gamma_{00}^+ \gamma_{02} \rangle \langle \gamma_{01}^+ \gamma_{01} \rangle \\ &= \det \begin{pmatrix} \langle \gamma_{00}^+ \gamma_{01} \rangle & \langle \gamma_{01}^+ \gamma_{01} \rangle \\ \langle \gamma_{00}^+ \gamma_{02} \rangle & \langle \gamma_{01}^+ \gamma_{02} \rangle \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.18)$$

Die Entwicklung der Exponentialfunktion in (4.14) ergibt schließlich für die Spin-Spin Korrelationsfunktion

$$\langle \sigma_{00} \sigma_{0n} \rangle = z_2^n \det \left(1^{(n)} + \left(\frac{1}{z_2} - z_2 \right) D_{ek}^{(n)} \right) \quad (4.19)$$

Man zeigt dies am besten durch Entwicklung der Determinante unter Benützung von (4.16). Die Korrelationsfunktion ist somit die Determinante folgender zyklischer Matrix

$$a_{ek}^{(n)} = z_2 \delta_{ek}^{(n)} + (1 - z_2^2) D_{ek}^{(n)} \quad (4.20)$$

Dieselbe Matrix wurde auch in [48] auf eine andere Art abgeleitet. Es ist uns also gelungen, die Spin-Spin Korrelationen durch Determinanten von Matrizen auszudrücken, deren Matrixelemente Propagatoren der fermionischen Graßmannvariablen x, y, x^+, y^+ sind. Da die Wirkung in diesen Variablen quadratisch ist, können wir die Korrelationen im Impulsraum berechnen. Im Anhang C ist dies durchgeführt. Das Ergebnis ist

$$D_{ek}^{(n)} = \langle \gamma_{0k-1}^+ \gamma_{0e} \rangle = \frac{1}{NM} \sum_{pq} e^{iq(l-k)} F_{pq} \quad (4.21)$$

mit

$$F_{pq} = \frac{e^{iq} N_{pq}}{\det A_{pq}}, \quad N_{pq} = h_{-q} h_p h_{-p} - (h_p + h_{-p}) \quad (4.22)$$

sowie

$$\det A_{pq} = h_p h_q h_{-p} h_{-q} - (h_p + h_{-p})(h_q + h_{-q}) + 4 \quad (4.23)$$

Zur Definition von h_p, h_q siehe Kap. 3.4.

Als vierten und letzten Schritt wollen wir die Determinante in eine Exponentialfunktion entwickeln. Wegen

$$\det(1+A) = e^{\text{tr} \ln(1+A)} = e^{\sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\alpha+1}}{\alpha} \text{tr} A^{\alpha}} \quad (4.24)$$

können wir für die Spin-Spin-Korrelationsfunktion schreiben

$$\langle \sigma_{00} \sigma_{ij} \rangle = z_2^n \left\langle e^{\sum_{\alpha=0}^{n-1} \left(\frac{1}{z_2} - z_2 \right) \gamma_{0\alpha}^+ \gamma_{0\alpha+1}} \right\rangle \quad (4.25)$$

$$= z_2^n e^{\sum_{\alpha=1}^{\infty} \tilde{F}_n^{(\alpha)}} \quad (4.26)$$

Eine einfache Berechnung der Spuren liefert

$$\tilde{F}_n^{(\alpha)} = (-)^{\alpha+1} \frac{\left(\frac{1}{z_2} - z_2 \right)^\alpha}{\alpha} \frac{1}{(NM)^\alpha} \sum_{p_1 q_1} \sum_{p_2 q_2} \dots \sum_{p_\alpha q_\alpha} \prod_{\beta=1}^{\alpha} F_{p_\beta q_\beta} \frac{\sin \frac{n}{2} (q_\beta - q_{\beta+1})}{\sin \frac{1}{2} (q_\beta - q_{\beta+1})} \quad (4.27)$$

mit den Randbedingungen $q_{\alpha+1} = q_1$.

Die Faktoren F_{pq} sind die Fourierkomponenten der freien Zweipunktfunktionen $\langle \gamma_{00}^+ \gamma_{0k} \rangle$ der Fermivariablen. Die Form (4.26) der wechselwirkenden Zweipunktfunktion $\langle \sigma_{00} \sigma_{ij} \rangle$ ist also nichts anderes als eine (wenn auch etwas komplizierte) Überlagerung von freien fermionischen Korrelationen im Impulsraum $\langle \gamma_{pq}^+ \gamma_{pq} \rangle$ und $\langle x_{pq}^+ x_{pq} \rangle$. Die Form (4.26) erinnert an eine Störungsentwicklung des exakten σ -Propagators nach den Fermi-Propagatoren im Impulsraum mit der Kopplungskonstanten $\left(\frac{1}{z_2} - z_2 \right)$. Die in Kap. 5.2 angegebene Relation zwischen dem σ -Feld und dem Fermifeld Ψ , eine Beziehung auf Operatorniveau, müßte auf die Zweipunktfunktion angewandt, die Form (4.26) ergeben. Wir wollen dies nicht näher untersuchen.

Durch eine ähnliche Rechnung zeigt man, daß die Korrelationen $\langle \mu_{00} \mu_{ij} \rangle$, definiert durch ein defektes Gitter [16] nach Fig. 4.2, sich ebenfalls durch freie Propagatoren darstellen lassen.

$$\langle \mu_{00} \mu_{0n} \rangle = \left\langle e^{\sum_{\alpha=0}^{n-1} -2 z_1 x_{-1\alpha}^+ x_{0\alpha}} \right\rangle \quad (4.28)$$

$$= e^{-\sum_{\alpha=1}^{\infty} \tilde{F}_n^{(\alpha)}} \quad (4.29)$$

mit

$$\tilde{F}_n^{(\alpha)} = \frac{(2z_1)^\alpha}{\alpha} \sum_{p_1 q_1} \dots \sum_{p_\alpha q_\alpha} \prod_{\beta=1}^{\alpha} G_{p_\beta q_\beta} \frac{\sin \frac{n}{2} (q_\beta - q_{\beta+1})}{\sin \frac{1}{2} (q_\beta - q_{\beta+1})} \quad (4.30)$$

$$G_{pq} = \frac{e^{ip N_{qp}}}{Z_{pq}}, \quad Z_{pq} = \det A_{pq}$$

Die physikalische Bedeutung der Variable μ_{ij} als Maß für die Unordnung des Systems wird in Kap. 5.1 erläutert. Wie die Form (4.25) bzw. (4.28) der Korrelationsfunktionen zeigt, sind die Variablen σ_{ij} und μ_{ij} mit den fermionischen Basisvariablen x_{ij} bzw. y_{ij} nichtlokal verbunden. Wählen wir einen beliebigen Punkt des Gitters als Referenzpunkt P_0 , so ist

$$\sigma_{ij} \sim e^{\sum_{P_0}^{ij} (\frac{1}{2} - z_2) \gamma^+ \gamma} \quad (4.31)$$

$$\mu_{ij} \sim e^{\sum_{P_0}^{ij} -2 z_1 x^+ x} \quad (4.32)$$

Für den Fall (4.32) kann man leicht durch eine Transformation $x \rightarrow -x$, $y \rightarrow -y$, $x^+ \rightarrow -x^+$, $y^+ \rightarrow -y^+$ innerhalb eines geschlossenen Weges zeigen, daß die Zustandssumme $Z^{(\Gamma)}$ dieses geschlossenen Weges auf die ursprüngliche nichtdefekte Zustandssumme führt. Damit wird die Größe μ_{ij} vom Weg ($P_0 \leftrightarrow ij$) unabhängig. Dies ist in mehr als 2 Dimensionen nicht der Fall. Allgemein gilt, daß (d-1)-dimensionale Gebilde der obigen Struktur (4.32) in einem d-dimensionalen Raum nicht von der Form, sondern nur vom Rand des (d-1)-dimensionalen Gebildes abhängen. Hier kommt also klar zum Ausdruck, daß die Transformation der Variablen σ_{ij} und μ_{ij} zu den Basisvariablen x_{ij}, y_{ij} (und x_{ij}^+, y_{ij}^+) einen nichtlokalen Charakter hat und eine scheinbare Pfadabhängigkeit auftritt. Für die kovariante Beschreibung im Lagrangeformalismus hat man als Preis diese Pfadkonstruktion zu zahlen. Benützt man die Operatorformulierung wie in Kap. 2, so läßt sich die Pfadkonstruktion zwar vermeiden, doch muß man sich im klaren sein, daß dies eine spezielle Eigenschaft linearer Gebilde im eindimensionalen Raum ist (in einer Dimension ist jeder Pfad eindeutig). In (1+2)- bzw. (1+3)-dimensionalen Problemen läßt sich selbst im Operatorformalismus die Einführung von Operatoren auf Linien- bzw. Flächen nicht vermeiden. Wir werden auf diesen Aspekt in Abschnitt 5.1 im Rahmen der Diskussion der 't Hooft'schen Vertauschungsrelationen [21] zurückkommen.

Die Darstellung der Korrelationsfunktionen des d-dimensionalen Ising-Modells durch die Graßmannvariablen $x, y, \dots$ lehrt uns, daß es vorteilhaft ist, scheinbare Pfadabhängigkeiten einzuführen. Wir betrachten Größen, die auf einer Kurve definiert sind, doch deren Erwartungswerte effektiv nur von den Endpunkten der Kurve abhängen. Man kann also im allgemeinen nicht hoffen, die Teilchenfelder (hier z.B. σ) und die Basisfelder, in denen die Theorie

eine einfache lokale Dynamik, d.h. eine einfache Lagrangedichte besitzt, durch eine lokale Beziehung der Art

$$\Phi_{\text{Teildien}}^{(x)} = S(x) \psi_{\text{Basis}}^{(x)} \quad (4.33)$$

als speziellen Fall der allgemeinen Beziehung

$$\Phi_{\text{Teildien}}^{(x)} = \Phi \left[\psi_{\text{Basis}}^{(x)} \right] \quad (4.34)$$

zu erhalten.

2. Die Zweipunktfunktion $\langle \sigma_{00} \sigma_{ij} \rangle$ im Skalenlimes für $T \gg T_c$

Die Spin-Spin-Korrelationsfunktion wurde auch in [53] berechnet. Wir wollen hier diese Form der Funktion benützen, um den Skalenlimes durchzuführen, da der Ausdruck (4.26) den divergenten (im Skalenlimes) Faktor z_2^n enthält. Anders ausgedrückt: die Form (4.26) hat keinen wohldefinierten Skalenlimes. Da die Funktion im thermodynamischen Limes an der Stelle $t = 0$ nicht analytisch ist, betrachten wir $t > 0$ und $t < 0$ separat. Es sei für $t < 0$ [53]

$$\langle \sigma_{00} \sigma_{ij} \rangle = M^2 e^{-\sum_{\alpha \text{ gerade}}^{\infty} F_{-ij}^{(\alpha)}} \quad (4.35)$$

mit

$$F_{-ij}^{(\alpha)} = (i)^\alpha \frac{1}{\alpha} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{dq_1 dp_1}{(2\pi)^2} \dots \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{dq_\alpha dp_\alpha}{(2\pi)^2} \prod_{\beta=1}^{\alpha} \frac{e^{-i(jq_\beta + ip_\beta)} \sin \frac{1}{2}(q_\beta - q_{\beta+1})}{z_{p_\beta q_\beta} \sin \frac{1}{2}(p_\beta + p_{\beta+1})} \quad (4.36)$$

$p_{\alpha+1} = p_1, q_{\alpha+1} = q_1, \text{Im } p_\beta < 0 \text{ bzw. } \text{Im } q_\beta < 0$

und der spontanen Magnetisierung ($= \langle \sigma_{00} \rangle$)

$$M = \left(1 - (\text{sh } x_1 \text{ sh } x_2)^{-2} \right)^{\frac{1}{8}} \quad (4.37)$$

Wir wollen nun den Skalenlimes bilden, d.h. der Abstand

$$r = \left((\tau i)^2 + (a j)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \equiv \left((x^0)^2 + (x^1)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.38)$$

soll konstant und endlich werden. (siehe Kap. 2.5). Die Skalierung des Raum-Zeit-Gitters zieht eine Skalierung der Impulse nach sich.

$$q = p_1 |t| \quad \text{bzw.} \quad p = p_0 |t| k \quad (4.39)$$

Damit ergibt sich ein Faktor (kt^2) vom Integralmaß. Im Fall $|t| \ll 1$ gilt

$$M^2 = (-2\eta\mu t)^{\frac{1}{4}} + O(t^2) \quad (4.40)$$

$$Z_{pq} = a - \gamma_1 \cos q - \gamma_2 \cos p \approx \frac{4\alpha}{(1+\sqrt{\alpha'})^2} (\mu + p_0^2 + p_1^2) t^2 + O(t^3) \quad (4.41)$$

$$\gamma_1 = \frac{8\alpha}{(1+\sqrt{\alpha'})^2} + O(t) \quad (4.42)$$

Die Größen k, μ, t, γ_i sind im Anhang B erklärt. Damit ergibt sich für $F_{-ij}^{(l)}$ (l gerade)

$$F_{-x^0, x^1}^l = \frac{i^l 2^l}{l} \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{\beta=1}^l \left\{ \frac{dp_{0\beta} dp_{1\beta}}{(2\pi)^2} \frac{e^{-i(x^0 p_{0\beta} + x^1 p_{1\beta})}}{\mu^2 + p_{0\beta}^2 + p_{1\beta}^2} \frac{p_{1\beta} - p_{1\beta+1}}{p_{0\beta} + p_{0\beta+1}} \right\} \quad (4.43)$$

Durch Übergang zu rotierten Integrationsvariablen $\vec{u}_\beta = \begin{pmatrix} \cos \theta_\beta & \sin \theta_\beta \\ -\sin \theta_\beta & \cos \theta_\beta \end{pmatrix} \vec{p}_\beta$

(θ_β Winkel zwischen $\vec{p}_\beta$ und $\vec{x}$) und Integration der Variablen $u_{1\beta}$ sehen wir, daß die Funktion in (4.43) nicht von x^0 und x^1 separat, sondern nur von $r = \sqrt{(x^0)^2 + (x^1)^2}$ abhängt [53]. Das heißt, daß die Korrelationen im Skalenlimes radialsymmetrisch sind. Die ausgezeichneten Richtungen im Gitter sind also vollkommen verschwunden.

Die Korrelationsfunktion (4.35) wird

$$\langle \sigma_{i_0} \sigma_{i_j} \rangle = |2\eta\mu t|^{\frac{1}{4}} \hat{F}_\pm(r) + O(|t|^{\frac{5}{4}}) \quad (4.44)$$

mit

$$\hat{F}_{-}(r) = e^{-\sum_{\substack{\ell=2 \\ \ell \text{ gerade}}}^{\infty} F_{-}^{(\ell)}(r)} \quad (4.45a)$$

bzw.

$$\hat{F}_{+}(r) = \sqrt{\mu_1 \mu_2} \left(\sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \text{ ungerade}}}^{\infty} x_{+}^{(\ell)}(r) \right) \hat{F}_{-}(r) \quad (4.45b)$$

mit

$$x_{+}^{(\ell)}(r) = (i)^{\ell-1} 2^{\ell} \frac{\varepsilon}{4\sqrt{\alpha}} \int_{-\infty}^{\ell} \prod_{\beta=1}^{\ell} \frac{dp_{0\beta} dp_{1\beta}}{(2\pi)^2} \frac{e^{-i(x^0 p_{0\beta} + x^1 p_{1\beta})}}{\mu^2 + p_{0\beta}^2 + p_{1\beta}^2} \prod_{\beta=1}^{\ell-1} \frac{p_{1\beta} - p_{1\beta'+1}}{p_{0\beta'} + p_{0\beta'+1}} \quad (4.46)$$

Der Index $\pm$ steht für $t \gtrless 0$.

Der Vorfaktor in (4.44) bewirkt, daß die Korrelationen wie $|t|^{\frac{1}{4}}$ zu Null gehen. Um in Skalenlimes eine endliche Variable zu erhalten, ist man gezwungen, das zur Spinvariable gehörige Feld multiplikativ zu renormieren, d.h.

$$\sigma_{\text{ren}} = |2\eta\mu t|^{\frac{1}{8}} \sigma \quad (4.47)$$

In σ_{ren} wird also der triviale Skalenfaktor mit den kritischen Exponenten $\frac{1}{8}$ absorbiert. Faktorisieren wir das Kleinabstandsverhalten heraus, so ergibt sich

$$F_{\pm}(r) = (2\sqrt{k}\eta\mu r)^{\frac{1}{4}} \hat{F}_{\pm}(r) \quad (4.48)$$

Diese Skalenfunktion ist in Fig. 4.3 für den symmetrischen Fall $k = 1$, $\eta = \sqrt{2}$, $\mu = 1.76$ abgebildet. Im Fall $T < T_c$ interessiert uns natürlich die "trunkierte" Zweipunktfunktion

$$\langle \sigma_{00} \sigma_{ij} \rangle - \langle \sigma_{00} \rangle^2 = M^2 (\hat{F}_{-}(r) - 1) \quad (4.49)$$

mit der Magnetisierung nach (4.40). Mit der Regularisierung (4.47) wird der Vakuumerwartungswert für $T < T_c$ zu

$$\langle \sigma_{\text{ren}} \rangle = 1 \quad (4.50)$$

Dies entspricht in der konventionellen Feldtheorie einer gewissen Renormierung der Wellenfunktion.

Die Funktion

$$F_{-}^{\text{trunc}}(r) = F_{-}(r) - \left(2^{\frac{3}{2}} \mu r\right)^{\frac{1}{4}} \quad (4.51)$$

ist in Fig. 4.3 gezeigt. Das analytische Verhalten für große und kleine Abstände r ist in Anhang D angegeben. Siehe auch [53].

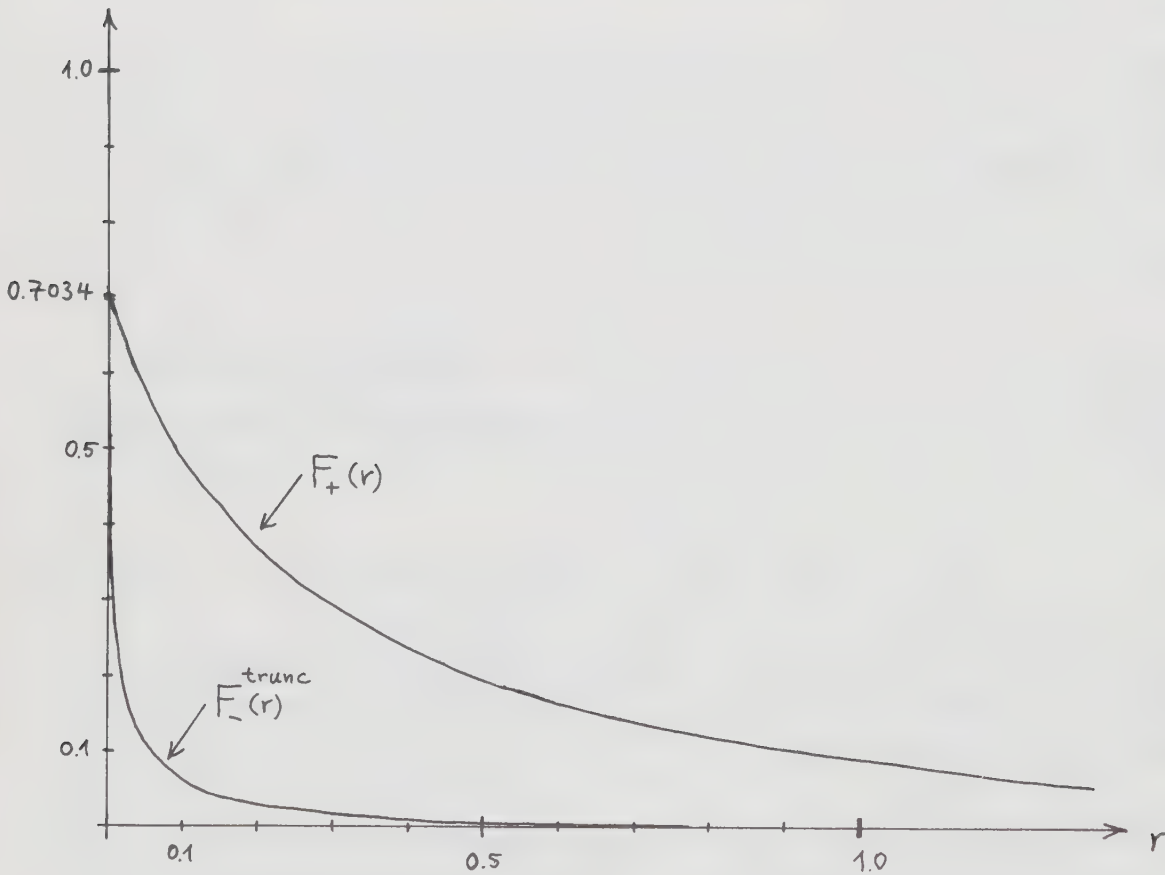


Fig. 4.3 Die Skalenfunktionen $F_+(r)$ und $F_-^{\text{trunc}}(r)$ der Korrelationsfunktionen
 $\langle \sigma_{i0} \sigma_{ij} \rangle_{T \gtrsim T_C}^{\text{trunc}} = |2\eta\mu t|^{\frac{1}{4}} \frac{F_{\pm}^{\text{trunc}}(r)}{(2\sqrt{k}\eta\mu r)^{\frac{1}{4}}}$ für den symmetrischen Fall
 $k = 1, \eta = \sqrt{2}; \mu = 1.76$.

Im nächsten Abschnitt sollen die physikalischen Konsequenzen dieser euklidisch invarianten Zweipunktfunktionen $F_{\pm}(r)$ diskutiert werden.

3. Die Zweipunktfunktion des Ordnungsparameter $\sigma(x)$ und Unordnungsparameter $\mu(x)$ im Impulsraum

Der feldtheoretische Inhalt der Korrelationsfunktion $\langle \sigma_{00} \sigma_{ij} \rangle$ ist am besten im Impulsraum zu diskutieren. Die Fouriertransformierte der "trunkierten" Korrelationsfunktion ist

$$\chi_{pq}^{\pm} = \sum_{ij} e^{i(p_i + q_j)} \langle \sigma_{00} \sigma_{ij} \rangle_{T \geq T_c}^{\text{trunc}} \quad (4.52)$$

Die Skalierung der Impulse und der Abstände

$$\begin{aligned} x^0 &= k|t|i & p &= |t|k p_0 & p_i &= p_0 x^0 \\ x^1 &= |t|j & q &= |t|p_1 & q_j &= p_1 x^1 \end{aligned} \quad (4.53)$$

und

$$\sum_{ij} \longrightarrow \int di dj = \frac{1}{k|t|^2} \int dx^0 dx^1 \quad (4.54)$$

liefert

$$\chi_{p_0 p_1}^{\pm} = \frac{|2\eta\mu t|^{\frac{1}{4}}}{k|t|^2} \int d^2x e^{i(p_0 x^0 + p_1 x^1)} \hat{F}_{\pm}^{\text{trunc}}(r) \quad (4.55)$$

Hier wurde (4.44) für die Zweipunktfunktion benutzt. Die Winkelintegration in (4.55) kann durchgeführt werden. Wir erhalten ($p = |\vec{p}|$)

$$\chi_p^{\pm} = \frac{|2\eta\mu t|^{\frac{1}{4}}}{k} |t|^{-\frac{3}{4}} 2\pi \int_0^{\infty} dr r J_0(pr) \hat{F}_{\pm}^{\text{trunc}}(r) \quad (4.56)$$

Der Faktor $|2\eta\mu t|^{\frac{1}{4}}$ rührt von der Renormierung der Felder her. Der Faktor $k|t|^2$ kommt von der Transformation des Volumenelementes auf die skalierten Größen. Das Verhalten des Propagators im Impulsraum ist damit proportional zu

$$|t|^{-2 + \frac{1}{4}} = |t|^{-\frac{7}{4}} \quad (4.57)$$

Dies entspricht einer anomalen Dimension für das Feld $\sigma(x)$ von $\frac{1}{8}$.

Da unter der Voraussetzung der multiplikativen Wellenfunktionsrenormierung, was in diesem Modell für das Feld $\sigma(x)$ erfüllt ist, sowohl aus dem Skalenfaktor $(=|2\eta\mu t|^{\frac{1}{4}})$ als auch aus dem renormierten Propagator (4.48) für kleine Abstände die anomale Dimension abgelesen werden kann, ist es kein Wunder, daß beide durch denselben Exponenten $\frac{1}{4}$ gekennzeichnet sind. Für Feldtheoretiker ist dies eine Folge der Renormierungsgruppengleichungen für die Wellenfunktionsrenormierungskonstante $Z_0(\propto|2\eta\mu t|^{\frac{1}{8}})$ und für den exakten Propagator [54].

Wählen wir die Renormierung (4.50) ($\langle\sigma_{ren}\rangle_{T<T_C} = 1$), so gilt für den renormierten Propagator im Impulsraum

$$D_{\pm}(p) = 2\pi \int_0^{\infty} dr \, r \, J_0(pr) \hat{F}_{\pm}^{trunc}(r) \quad (4.58)$$

Wir wollen nun die Fälle $T > T_C$ und $T < T_C$ getrennt behandeln.

a) $T > T_C$ (Index +)

In (4.45b) entwickeln wir die Exponentialfunktion $\hat{F}_{-}(r)$ und fassen Terme der gleichen Ordnung^{*)} (in ℓ) zusammen. Es ergibt sich

$$\hat{F}_{+}(r) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \hat{F}_{+}^{(\ell)}(r) \quad (4.59)$$

mit

$$\begin{aligned} \hat{F}_{+}^{(1)}(r) &= X_{+}^{(1)}(r) \\ \hat{F}_{+}^{(3)}(r) &= X_{+}^{(3)}(r) - X_{+}^{(1)}(r) F_{-}^{(2)}(r) \quad \text{usw.} \end{aligned} \quad (4.60)$$

Das Bildungsgesetz folgt aus (4.45b).

Der Propagator $D_{+}(p)$ spaltet also in eine Summe von Anteilen auf:

$$D_{+}(p) = \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \text{ ungerade}}}^{\infty} D_{+}^{(\ell)}(p) \quad (4.61)$$

mit

$$D_{+}^{(\ell)}(p) = 2\pi \int_0^{\infty} dr \, r \, J_0(pr) \hat{F}_{+}^{(\ell)}(r) \quad (4.62)$$

*) Diese Entwicklung kam von der Exponentialdarstellung der Determinante (4.24).

Aus dem Verhalten für große Abstände (siehe Anhang D)

$$\hat{F}_+^{(\ell)}(r) \sim \frac{e^{-\ell \mu r}}{r^\lambda}, \quad \lambda \geq \ell \quad (4.63)$$

ergibt sich, daß $D_+^\ell(p)$ Wurzelsingularitäten bei $p = \pm i\mu$ aufweist. Die analytische Struktur des euklidischen Propagators ist in Fig. 4.4a schematisch dargestellt.

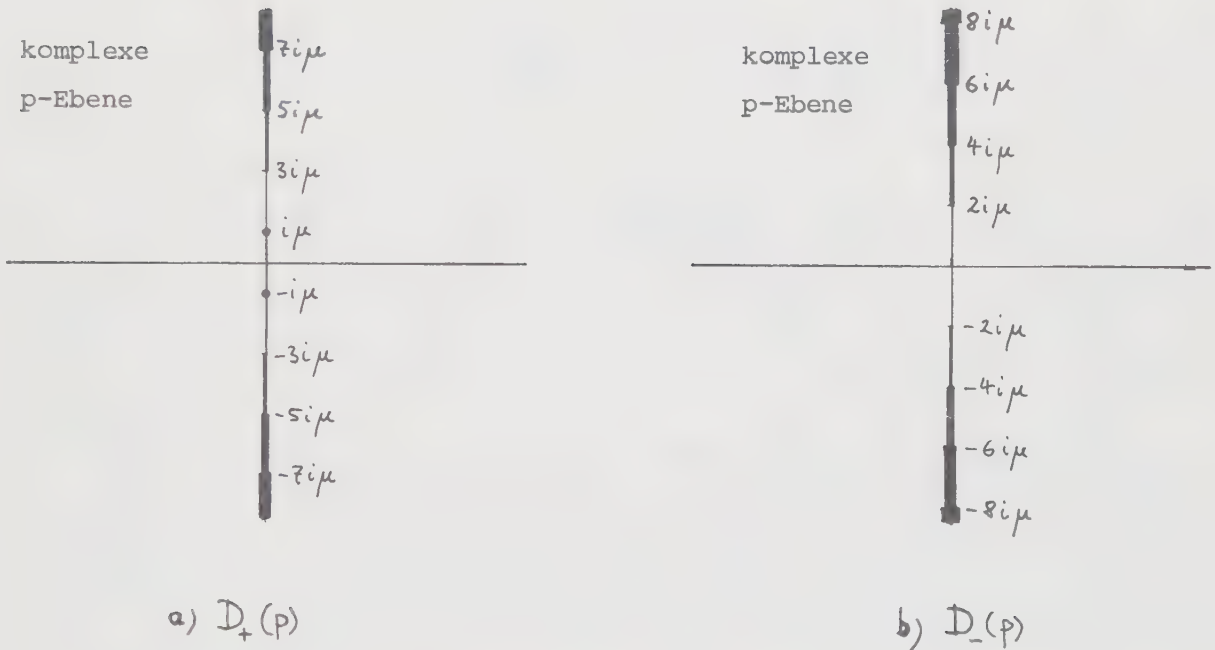


Fig. 4.4 Analytische Struktur der euklidischen Propagatoren $D_\pm(p)$.

Neben dem Pol bei $p = \pm i\mu$ haben wir Wurzelverzweigungsschnitte bei a) $\pm i(2n+1)$ bzw. b) bei $\pm i 2n$.

Der Fall $\ell = 1$ muß gesondert betrachtet werden (da $\lambda = \frac{1}{2} < \ell = 1$)

$$D_+^1(p) = 4\pi \int_0^\infty dr r J_0(pr) \frac{K_0(\mu r)}{2\pi} = \frac{2}{\mu^2 + p^2} \quad *) \quad (4.64)$$

*) Siehe Ref. [40] S.137 zur Berechnung der Integraltransformierten.

Wir erkennen die Polstruktur bei $p = \pm i\mu$. Der exakte Propagator $D_+(p)$ geht also für $r \rightarrow \infty$ in den freien Propagator

$$\Delta_+(r) = \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \frac{e^{i p x}}{p^2 + \mu^2} = \frac{K_0(\mu r)}{2\pi} \quad (4.65)$$

über, denn die höheren Beiträge zu $D_+(p)$ fallen stärker ab. Der Unterschied zwischen dem exakten Propagator (auf Residuum 1 normiert) und dem freien Propagator ist in Fig. 4.5 gezeigt.

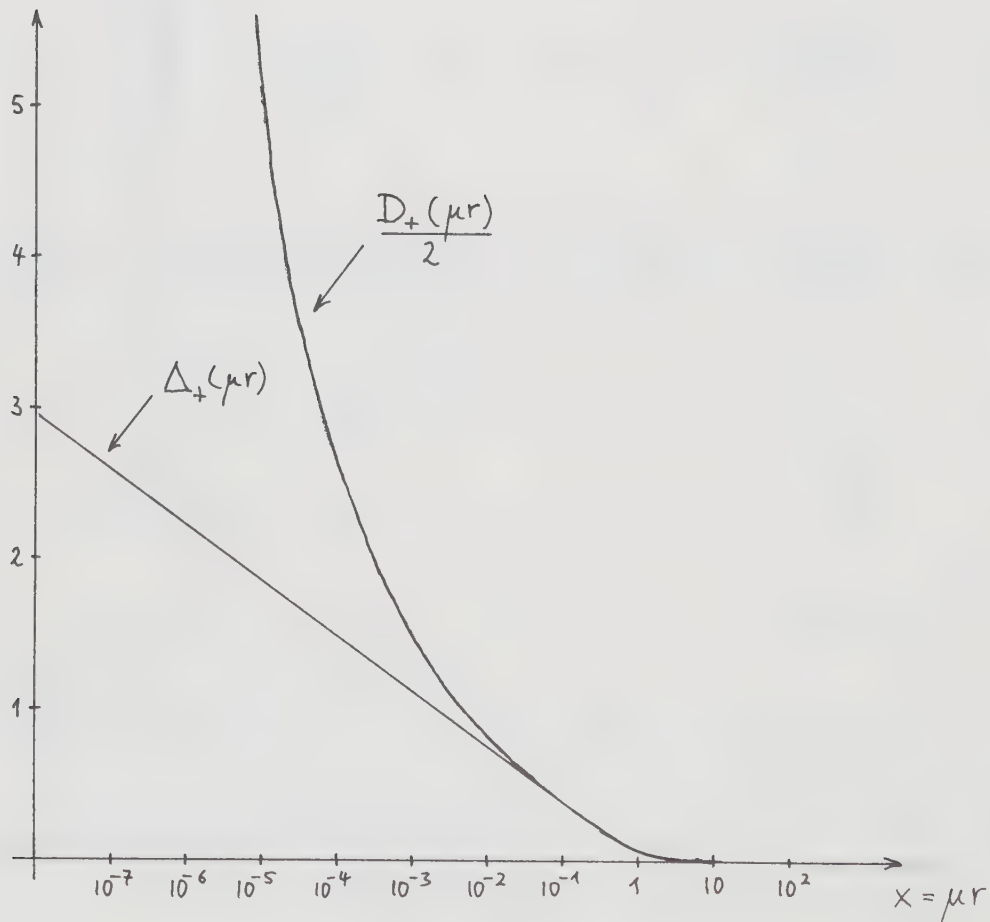


Fig. 4.5 Vergleich des exakten Propagators $D_+(x)$ mit dem freien Propagator $\Delta_+(x)$

Der renormierte Propagator $D_+(p)$ hat die Struktur, die nach [22] (LSZ) von dem Propagator eines interpolierenden Feldes asymptotisch für Zeit $t \rightarrow \pm \infty$ verlangt wird, hat also die Struktur eines freien Feldes.

Der wickrotierte Propagator hat einen Pol bei der Masse $\mu(\alpha)$. Das zugehörige Feld $\sigma_r(x)$ hat somit entsprechende asymptotische freie Felder $\sigma_r^{\text{in}}(x)$ und $\sigma_r^{\text{out}}(x)$ als Grenzwerte für $t \rightarrow \pm \infty$. In einer Streutheorie könnte also das Feld des Ordnungsparameters $\sigma_r(x)$ ($T > T_c$) als asymptotisches Feld im Ein- und Ausgangskanal benützt werden, um freie Teilchen der Masse μ zu erzeugen.

Das Verhalten des renormierten Propagators $D_+(r)$ für kleine Abstände ergibt sich aus (D1) zu

$$D_+(r) \xrightarrow{r \rightarrow 0} \frac{c}{r^{\frac{1}{4}}} \left(1 - \frac{\mu r}{2} \ln \left(\frac{\mu r}{8} + \gamma_E \right) + \dots \right) \quad (4.66)$$

mit $c = 0.5424\dots$, $\gamma_E = 0.5772\dots$.

Der renormierte exakte Propagator hat für kleine Abstände eine Singularität der Form $r^{-\frac{1}{4}}$, d.h. ein nichtkanonisches Verhalten. Die zu diesem Propagator gehörige Dimension des Feldes $\sigma_r(x)$ ist $\frac{1}{8}$. Da die kanonische Dimension eines Skalarfeldes in (1+1) Dimensionen Null ist, handelt es sich um ein hyperkanonisches Feld ($\frac{1}{8} > 0$).

Diese Situation ist nicht eine besondere Eigenschaft des Isingmodells. Sie tritt z.B. auch im Thirring-Modell auf. Hier hängt die anomale Dimension dagegen von einem kontinuierlichen Parameter, der renormierten Kopplungskonstanten, ab. Die kanonische Dimension des Fermifeldes (in 1+1 Dimensionen) ist $\frac{1}{2}$. Die von Wilson [55] berechnete Form ($\lambda \equiv$ Kopplung der 4-Fermikopplung des Thirringmodells) ist

$$\frac{1}{2} + \frac{\lambda^2/4\pi^2}{1 - \lambda^2/4\pi^2} \geq \frac{1}{2} \quad (4.67)$$

mit $\lambda < 2\pi$ (sonst ist das Modell nicht definiert).

Zusammenfassend kann man sagen, daß das Feld $\sigma_r(x)$ im Infraroten durch einen Massenpol, im Ultravioletten durch die anomale Dimension $\frac{1}{8}$ ausgezeichnet ist.

b) $T < T_c$ (Index -)

Wegen der in Kap. 3.2 behandelten Dualität des Ising-Modells ist die Korrelationsfunktion $\langle \sigma_{00} \sigma_{ij} \rangle$ für $T > T_c$ identisch mit der Funktion $\langle \mu_{00} \mu_{ij} \rangle$ eines Unordnungsparameters μ_{ij} für $T^* < T_c$. T^* ist die duale Temperatur und aus T durch

$$\operatorname{sh} x_1^* \operatorname{sh} x_2 = \operatorname{sh} x_2^* \operatorname{sh} x_1 = 1 \quad (4.68)$$

zu berechnen. In der Nähe von T_c ($t \ll 1$) gilt

$$t^* = -t \quad (4.69)$$

Die Dualitätssymmetrie im Skalenlimes entspricht einer spielungsartigen Invarianz der Theorie unter $t \rightarrow -t$

$$\langle \sigma_{00} \sigma_{ij} \rangle_{t=-t_0} \stackrel{\text{Dualität}}{\equiv} \langle \mu_{00} \mu_{ij} \rangle_{t=t_0} \quad (4.70)$$

Der Spin-Spin-Korrelationsfunktion für $T \gtrsim T_c$ ist eine Zweipunktfunktion eines Feldes $\mu(x)$ zugeordnet, die bei $T^* > T_c$ berechnet wird.

Wir betrachten also das dynamische System "Ising-Modell" für $T \gtrsim T_c$ im Skalenlimes und stellen fest, daß es neben den Spinanregungen, beschrieben durch $\langle \sigma_{00} \sigma_{ij} \rangle_{T > T_c}$ noch zusätzliche Anregungen gibt, die wegen der Dualitätseigenschaft des Ising-Modells durch $\langle \sigma(0) \sigma(x) \rangle_{T^* < T_c}$ beschrieben werden können. Wir diskutieren deshalb die zu diesen Anregungen gehörige Zweipunktfunktion und bezeichnen sie mit $\langle \mu(0) \mu(x) \rangle$. Die "trunkierte" Zweipunktfunktion für $T > T_c$ ist wegen (4.70)

$$\langle \mu(0) \mu(x) \rangle = Z_\mu(t) D_-(r) \quad (4.71)$$

mit der Wellenfunktionsrenormierungskonstante

$$Z_\mu(t) = |2\eta\mu t|^{\frac{1}{4}} \quad (4.72)$$

und dem renormierten Propagator (trunkiert)

$$D_-(r) = \hat{F}_-(r) - 1 \quad (4.73)$$

Das Verhalten von $D_-(r)$ für kleine r ist (siehe Anhang D)

$$D_-(r) \xrightarrow{r \rightarrow 0} \frac{c}{r^{\frac{1}{2}}} - 1 + O(r \ln \mu r) \quad (4.74)$$

Auch das Feld $\mu_r(x)$ hat die hyperkanonische Dimension $\frac{1}{8}$ wie das Feld $\sigma_r(x)$. Um die analytische Struktur zu erschließen, benützen wir die Impulsdarstellung $D_-(p)$ nach (4.58) und

$$\hat{F}_-(r) - 1 = \sum_{\substack{l=2 \\ l \text{ gerade}}}^{\infty} \hat{F}_-^{(l)}(r) \quad (4.75)$$

Die Entwicklung der Exponentialfunktion in (4.45a) liefert

$$\begin{aligned} \hat{F}_-^{(2)}(r) &= -F_-^{(2)}(r) \\ \hat{F}_-^{(4)}(r) &= -F_-^{(4)}(r) + \frac{1}{2} (F_-^{(2)}(r))^2 \quad \text{usw.} \end{aligned} \quad (4.76)$$

Die $F_-^{(l)}(r)$ sind in (4.43) angegeben.

Mit dem Großabstandsverhalten (siehe Anhang D)

$$\hat{F}_-^{(l)}(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{e^{-l\mu r}}{r^\lambda}, \quad \lambda \geq l \quad (4.77)$$

ergibt sich, daß $D_-(p)$ Wurzelsingularitäten bei

$$p = \pm i l \mu \quad (4.78)$$

hat. Die analytische Struktur von D_- ist in Fig. 4.4b dargestellt.

Der Anteil mit den Verzweigungspunkten $p = \pm i 2\mu$ stellt den führenden Term für das Verhalten von $D_-(r)$ für $r \rightarrow \infty$ dar. Wir sehen, daß sich das Feld $\mu_r(x)$ nicht als interpolierendes Feld einer Streutheorie nach LSZ [22] verwenden läßt, da es für $r \rightarrow \infty$ (d.h. $t \rightarrow \pm \infty$ nach Wickrotation) nicht in ein freies Feld übergeht. Der isolierte Polbeitrag wie beim Feld $\sigma_r(x)$ fehlt hier. Der führende Term ist

$$D_{-}^{(2)}(p) = -2\pi \int_0^{\infty} dr r J_0(pr) F_{-}^{(2)}(r) \quad (4.79)$$

mit $(\tilde{r} = \mu r)$

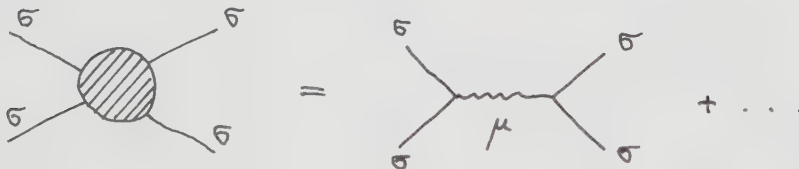
$$F_{-}^{(2)}(r) = -\frac{1}{\pi^2} \left\{ \tilde{r}^2 (K_1^2(\tilde{r}) - K_0^2(\tilde{r})) - \tilde{r} K_0(\tilde{r}) K_1(\tilde{r}) + \frac{1}{2} K_0^2(\tilde{r}) \right\} \quad (4.80)$$

Die Integrale können ausgewertet werden [40] und es ergibt sich mit $\tilde{p} = p/2\mu$

$$D_{-}^{(2)}(p) = \frac{1}{2\pi \tilde{p}^3} \left[\sqrt{1+\tilde{p}^2} \ln(1+\sqrt{1+\tilde{p}^2}) - \tilde{p} \right] \quad (4.81)$$

Wie für die Propagatoren des Ordnungsparameterfeldes ergibt sich hier eine Wurzelsingularität. Propagatoren dieser Art, die nicht als Grenzwert für Zeit $t \rightarrow +\infty$ einen freien Propagator haben, werden betrachtet, um die Eigenschaften von "confinement" von Quarks zu beschreiben [41].

In unserem Problem der Ising-Feldtheorie ist es also sinnvoll, nur das Feld $\sigma_r(x)$ als interpolierendes Feld nach LSZ zu betrachten. Trotzdem könnte es von Nutzen sein, die Streuung der σ -Teilchen störungstheoretisch durch μ -Propagatoren der impulsabhängigen Masse $m(p)$ zu beschreiben. Diagrammatisch ergibt sich dann z.B. für die exakte Vierpunktfunktion



Auch die Stärke der Kopplungen $\text{---}\text{~}\text{~}\text{~} g(p)$ wäre impulsabhängig. Der Preis, den wir für die Beschreibung der Wechselwirkung von σ -Teilchen durch die μ -Pseudoteilchen zu zahlen haben ist also das Aufgeben der Zuordnung einer bestimmten Masse für das μ -Pseudoteilchen.

Falls sich herausstellen sollte, daß solche Propagatoren ohne Pole auch in vier Dimensionen auftreten, so sind die zugehörigen Felder aussichtsreiche Kandidaten für Quark-Felder. Störungstheoretisch kann es wie im obigen Beispiel sinnvoll sein, Quarkpropagatoren (μ -Pseudoteilchen) mit variabler Masse zu betrachten. In den asymptotischen Kanälen (nach LSZ) dagegen werden wir

nur die Hadronen wiederfinden, genauso wie wir in unserem Beispiel nur asymptotische Streuzustände des σ -Teilchen betrachten können.

Aus diesem Grund erscheint es in unserem Modell sinnvoll, nach einer Beschreibung der Dynamik mit Hilfe des σ - und μ -Feldes zu suchen. Wir wollen kurz zusammenfassen, was wir zu dieser Fragestellung bisher erfahren haben.

Wir betrachteten die Ising-Theorie in (1+1) Dimensionen im Skalenlimes. Die Theorie ließ sich in den Basis-Fermivariablen lösen, d.h. in diesen Feldern ist die Lagrangedichte quadratisch. In dieser Form war der Teilchenaspekt der Theorie, beschrieben durch wechselwirkende Propagatoren vollständig verborgen. Erst durch die Betrachtung der Felder $\sigma_r(x)$ und $\mu_\mu(x)$ und ihrer Korrelationsfunktionen wurde der Teilchencharakter sichtbar. Als spezieller Fall der Fig. 1.1 ergibt sich

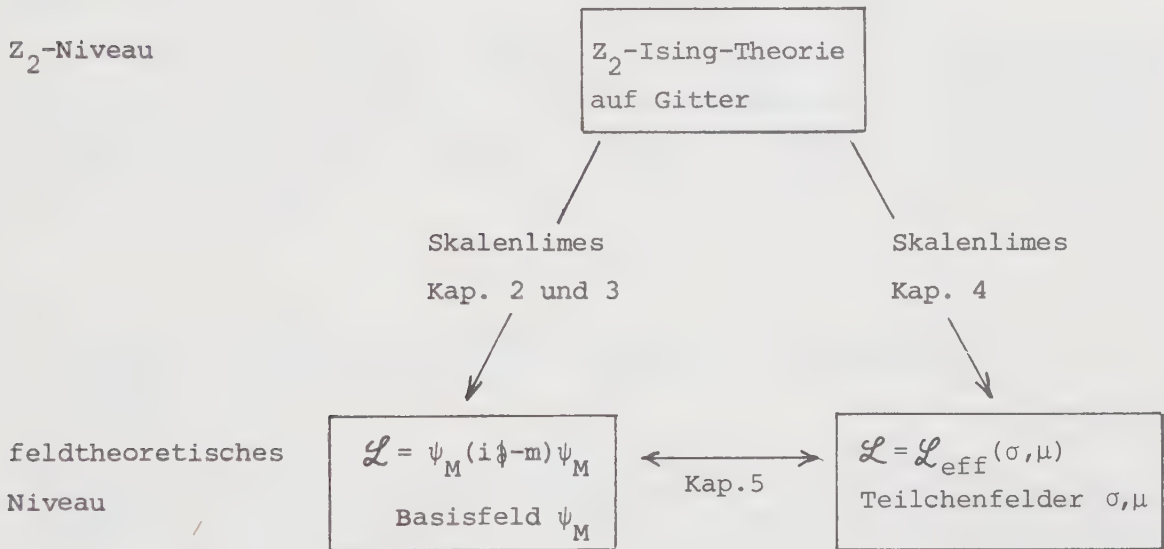


Fig. 4.6 Das Ising-Modell im Skalenlimes als Modell einer wechselwirkenden QFT.

Das Basisfeld ψ_M , ein freies Majoranafeld konnte wegen der nichtlokalen Randbedingung nicht als asymptotisches Feld nach LSZ [22] verwendet werden. Wegen der Möglichkeit der Klassifikation aller Zustände nach der Teilchenparität ergaben sich zwei Superauswahlsektoren, die die Ursache für die Stabilität

der beiden Felder $\sigma_r(x)$ und $\mu_r(x)$ bildeten. Gibt es einen Übergang vom Basisfeld $\psi_M(x)$ zu den Teilchenfeldern $\sigma_r(x)$ und $\mu_r(x)$ ohne die beides verbindende Ising-Theorie zu betrachten ? Diese Frage wird im nächsten Kapitel geklärt.

5. Kapitel

Die Teilchenfelder $\sigma(x)$ und $\mu(x)$ und ihre Dynamik

Im vorigen Kapitel haben wir die exakten Propagatoren der Teilchenfelder $\sigma_r(x)$ und $\mu_r(x)$ berechnet. Auf Grund ihrer analytischen Eigenschaften sahen wir, daß das Spektrum des Hamiltonoperators beschrieben wird durch die Zweipunktfunktionen beider Teilchenfelder.

In Abschnitt 1 soll die Operator-Algebra der beiden Felder diskutiert werden. Als verbindendes Element der beiden Felder wird ein "Dressing-Operator" eingeführt.

Im 2. Abschnitt sollen die beiden Felder in einer Form dargestellt werden, in der der Skalenlimes dann durchgeführt werden kann.

In Abschnitt 3 wird die Dynamik nur in den Teilchenfeldoperatoren geschrieben. Da der Skalenlimes in den Feldgleichungen nicht durchzuführen ist, wird versucht näherungsweise den Hamiltonoperator durch die Teilchenfelder darzustellen.

1. Relation zwischen den Teilchenfeldoperatoren $\sigma(x)$ und $\mu(x)$.

Dressing Operator.

Wir betrachten die Heisenberg-Operatoren zu den beiden in Kapitel 4 behandelten Variablen σ und μ . Die dort berechneten Korrelationen lassen sich als zeitgeordnete (Index i) Vakuum Erwartungswerte dieser Heisenberg-Operatoren auffassen.

$$\hat{\sigma}_{ij} = V^i \sigma_j^\dagger V^{-i} \quad (5.1)$$

$$\hat{\mu}_{ij} = V^{*i} \mu_j V^{*-i} \quad (5.2)$$

Die Transfermatrix ist in Kap. 2.5 als Funktion der Operatoren σ_j^α oder c_j^+ , c_j bzw. ψ_j^α definiert.

V^* ist die duale Transfermatrix^{*)}. Mit

$$(\sigma_j^3)^* = -\sigma_j^1 \sigma_{j+1}^1 : = \mu_j^3 \quad (5.3a)$$

$$(\sigma_j^1)^* = \prod_{n=1}^{j-1} (-\sigma_n^3) : = \mu_j^1 = \mu_j \quad (5.3b)$$

gilt

$$V_1^* = V_2 \quad \text{bzw.} \quad V_2^* = V_1 \quad (5.4)$$

oder

$$V_a^* = \left(\frac{\text{sh } x_a^*}{\text{sh } x_a} \right)^{\frac{M}{2}} V_b \quad (5.5)$$

Die in Kap. 2 eingeführten symmetrisierten Transfermatrizen V_a und V_b sind also dual zueinander und die Zustandssumme $Z = \text{tr } V_a^N$ ist wegen der zyklischen Vertauschungsinvarianz unter der Spur bis auf einen konstanten Faktordualitätsinvariant. Der String-Operator $\mu_j = \prod_{\alpha=1}^{j-1} (-\sigma_\alpha^3)$ ist wegen der Beziehung

$$\left\langle T(\hat{\sigma}_{00} \hat{\sigma}_{ij}) \right\rangle_{\text{per. Rdb.}} = \left\langle T(\hat{\mu}_{00} \hat{\mu}_{ij}) \right\rangle_{\text{duale Rdb.}} \quad (5.6)$$

der zum Operator σ_j^1 duale Operator und die Definition (5.3b) ist damit gerechtfertigt.

So wie durch den nichtverschwindenden Vakuumerwartungswert (VEW) von σ_j^1 für $T < T_c$ die magnetische Ordnung des Systems beschrieben wird, ist der VEW von μ_j ein Maß für die Unordnung des Systems bei $T > T_c$. Der VEW von μ_j bei $T < T_c$ verschwindet, d.h. die Unordnung verschwindet. Die Variable μ_j wird also im Gegensatz zum Ordnungsparameter σ_j^1 als Unordnungsparameter bezeichnet. Seine Korrelationen sind exakt die, die in Fig. 15 definiert und vor Formel (4.25) berechnet wurden. Da wir den Unordnungsparameter durch eine nichtlokale Überlagerung der ursprünglichen Freiheitsgrade σ_j^3 konstruiert haben (siehe (2.26)), wollen wir das Feld $\mu(x)$ auch als Soliton- oder Kinkfeld bezeichnen.

^{*)} V^* analog zur T^* , nicht zu verwechseln mit komplexkonjugiert.

$T(\dots)$ bedeutet die Zeitordnung und bezieht sich auf den Index i . Die zu den periodischen Randbedingungen (in Raumrichtung) $\sigma_1^1 = \sigma_{m+1}^1$ gehörigen dualen Randbedingungen sind durch " $\mu_1 = 1, \mu_{m+1}$ beliebig" gegeben. Beide Randbedingungen sind lokal im Sinne von Kap. 2.3. Da wir durch die Rechnungen in Kap.4 erkannt haben, daß das Spektrum des Hamiltonoperators durch die Propagatoren der beiden Felder $\sigma(x)$ und $\mu(x)$ beschrieben wird, interessieren wir uns für die Relation zwischen diesen Teilchenfeldern.

Aus Formel (2.24) ergibt sich

$$\sigma_j^1 = (c_j + c_j^+) \mu_j \quad (5.7)$$

oder mit Hilfe der Heisenberg-Operatoren

$$\hat{\sigma}_{ij} = S_{ij} \hat{\mu}_{ij} \quad (5.8)$$

Der Operator S_{ij}

$$S_{ij} = V^i (c_j + c_j^+) V^{-i} \quad (5.9)$$

$$S_{ij}^2 = 1 \quad (5.10)$$

vermittelt zwischen den Teilchenfeldern $\mu(x)$ und $\sigma(x)$.

Die Transformation des Ising-Modells, die die Wirkung invariant läßt, (also eine Symmetrietransformation des Systems) ist in diesem Operatorformalismus durch

$$\begin{aligned} \sigma_j^1 &\xrightarrow{Z_2} -\sigma_j^1 \\ \sigma_j^2 &\xrightarrow{Z_2} -\sigma_j^2 \\ \sigma_j^3 &\xrightarrow{Z_2} \sigma_j^3 \end{aligned} \quad (5.11)$$

gegeben.

Diese Z_2 -Transformation läßt die Transfermatrix, bzw. den Hamiltonoperator invariant. Die Variable σ_j^1 trägt ein nichttriviales Transformationsverhalten unter dieser Symmetrie.

Die Variable μ_j transformiert sich nicht und ist deshalb ein Z_2 -Skalar. Das nichttriviale Transformationsverhalten des Feldes σ steckt also in dem Operator S_{ij} (wegen 5.8). Da er dem Feld $\mu(x)$ die Symmetrieeigenschaft Z_2 "anzieht", bezeichnen wir diesen Operator als "Dressingoperator".

Der Z_2^2 -Dressingoperator S_{ij} besitzt ein nichttriviales Z_2^2 -Transformationsverhalten

$$S_{ij} \xrightarrow{Z_2} -S_{ij} \quad (5.12)$$

Er läßt sich mit Hilfe der Teilchenoperatoren $\hat{\sigma}_{ij}$ und $\hat{\mu}_{ij}$ darstellen.

$$S_{ij} = \hat{\sigma}_{ij} \hat{\mu}_{ij} = V^i \sigma_j^i \mu_j V^{-i} \quad (5.13)$$

Mit Hilfe des Dressing-Operator kann man von einem Teilchenfeld μ_{ij} zu einem anderen Teilchenfeld σ_{ij} transformieren. Kennt man alle Dressing-Operatoren dieser Art, so kann der Teilcheninhalt der Theorie erschlossen werden. Im Falle daß, z.B. aus gruppentheoretischen Überlegungen, die Dressing-Operatoren leichter berechnet werden können als die zugehörigen interpolierenden Felder, bringt die Einführung dieser Operatoren Vorteile. In unserem Fall auf dem Gitter hat der Dressing-Operatoreine sehr einfache Struktur; er ist identisch mit dem Basisfeld ψ_j^1 . Wir sehen, daß in diesem Beispiel die Zahl der Symmetrietransformation die Zahl der Teilchenfelder bestimmt. Zusätzlich zu dem Skalar unter Z_2 , d.i. $\hat{\mu}_{ij}$, entsteht als einziges Teilchenfeld noch $\hat{\sigma}_{ij}$, das sich nichttrivial unter Z_2 transformiert. Die Proliferation von Teilchen, d.h. das Auftreten mehrerer Felder ist eine Folge der Symmetrie der Wirkung im Skalenlimes.

In der Schrödingerdarstellung gilt

$$S_j = c_j^+ + c_j \quad (5.14)$$

$$\{S_j, S_e\} = 2\delta_{je} \quad (5.15)$$

Mit den Teilchenfeldern σ_j^1 und μ_j hat dieser Operator keine kanonische Vertauschungsrelationen [58], sondern

$$[\sigma_l^1, S_j]_+ = 0 \quad \text{falls } l < j \quad (5.16)$$

$$[\sigma_l^1, S_j]_- = 0 \quad \text{falls } l \geq j$$

$$[\mu_e, S_j]_+ = 0 \quad \text{falls } l > j \quad (5.17)$$

$$[\mu_e, S_j]_- = 0 \quad \text{falls } l \leq j$$

Diese etwas ungewöhnliche Art der Realisierung von Mikrokausalität ist nur möglich, da der Lichtkegel in 2 Dimensionen in zwei unzusammenhängende Bereiche zerfällt. Die beiden Teilchenfelder genügen ähnlichen Vertauschungsrelationen

$$\mu_e \sigma_j^1 = \pm \sigma_j^1 \mu_e \quad \text{falls } \begin{matrix} l \leq j \\ l > j \end{matrix} \quad (5.18)$$

Diese Vertauschungsrelation ist ein Spezialfall der allgemeinen von 't Hooft angegebenen [21] Vertauschungsrelationen zwischen Wilson und 't Hooft-Operator (3+1 dim) für SU(N) Eichtheorien.

$$A(C) B(C') = g B(C') A(C) \quad (5.19)$$

$$g = \frac{2\pi i n}{N}$$

g ist ein Element des Zentrums Z_N von SU(N) und n gibt die Zahl an, wie oft sich die Kurve C' um C windet. Für den Fall $N = 2$ ergibt sich die Vertauschungsrelation (5.18). Auch im allgemeinen Fall (5.19) werden die Korrelationen der Operatoren A und B direkt mit dem Teilchenspektrum der Theorie in Verbindung gebracht. Ob es eine der Beziehung (5.8) analoge Relation zwischen den Operatoren A und B gibt, ist nicht bekannt. Man kann sehen [58], daß die Vertauschungsrelationen (5.16-18) im Kontinuumslimit überleben werden. Auch die auf dem Gitter gültige Relation zwischen den Teilchenfeldern σ_j und μ_j behält im Kontinuumslimit ihre Bedeutung. Man erwartet

$$\sigma(x) = \lim_{x \rightarrow y} \psi^1(y) \mu(x) \quad (5.20)$$

wobei $\psi^1(y)$ die 1. Komponente des im Kap. 2.8 berechneten Majoranafeldes (2.64) ($\psi_j^1 = c_j + c_j^+$) und $\sigma(x)$, $\mu(x)$ die im nächsten Abschnitt aus den Gitteroperatoren zu konstruierenden Kontinuumsoperatoren sind.

2. Die Operatoren σ_j und μ_j und ihr Skalenlimes

Der Unordnungsparameter μ_j kann durch Fermionen c_j^+ , c_j ausgedrückt werden

$$\mu_j = e^{i\pi \sum_{i=1}^{j-1} c_i^+ c_i} = e^{i\frac{\pi}{2} \sum_{i=1}^{j-1} (1 - i \psi_j^1 \psi_j^2)} \quad (5.21)$$

$$\mu_1 = 1 \quad (5.22)$$

Es ist möglich, die Matrixelemente dieses Operators bezüglich eines Hilbert- raumes zu berechnen, der durch die Erzeuger ξ_q^+ (aus Kap. 2.6) aus dem Fock- vakuum $|0\rangle$ (mit $\xi_q|0\rangle = 0$) aufgebaut wird. Die Teilchenzahl bezüglich ξ_q^+ ist gerade; deshalb benützen wir antiperiodische Randbedingungen für die c_j^+ , c_j . Fouriertransformation und Bogoliubovrotation wie in Kap. 2.6 liefert

$$\mu_j = e^{i\pi \frac{1}{M} \sum_{qq'} (\xi_q^+ \xi_q) R_{j,qq'} \begin{pmatrix} \xi_{q'}^+ \\ \xi_{q'} \end{pmatrix}} \quad (5.23)$$

mit

$$R_{j,qq'} = \begin{pmatrix} f_j(q+q') \cos \Phi_q \sin \Phi_{q'} & f_j(q-q') \cos \Phi_q \cos \Phi_{q'} \\ f_j(q'-q) \sin \Phi_q \sin \Phi_{q'} & f_j(-q-q') \sin \Phi_q \cos \Phi_{q'} \end{pmatrix} \quad (5.24)$$

und

$$f_j(x) = \sum_{\alpha=1}^{j-1} e^{-i\alpha x} = \frac{e^{-ix(j-1)} - 1}{1 - e^{ix}} \quad (5.25)$$

Sato et al. gelang es [18] für diesen Ausdruck ein bezüglich der Operatoren ξ_q^+, ξ_q normalgeordnetes Produkt $\hat{\mu}_j$ zu berechnen, das exakt den Operator μ_j im Fockraum der ξ_q^+ darstellt. Das Ergebnis ist (z.B. für $T > T_c$)

$$\mu_j = \langle \mu_j \rangle e^{\frac{1}{2M} \sum_{qq'} (\xi_q^+ \xi_q) \hat{R}_{jqq'} \begin{pmatrix} \xi_{q'}^+ \\ \xi_{q'} \end{pmatrix}} \quad (5.26)$$

mit

$$\hat{R}_{jqq'} = \begin{pmatrix} i \hat{f}_j(q+q') \left(\left| \frac{b_{q'}}{b_q} \right| - \left| \frac{b_q}{b_{q'}} \right| \right) & \hat{f}_j(q-q') \left(-\left| \frac{b_{q'}}{b_q} \right| - \left| \frac{b_q}{b_{q'}} \right| \right) \\ \hat{f}_j(-q+q') \left(\left| \frac{b_{q'}}{b_q} \right| + \left| \frac{b_q}{b_{q'}} \right| \right) & i \hat{f}_j(-q-q') \left(\left| \frac{b_{q'}}{b_q} \right| - \left| \frac{b_q}{b_{q'}} \right| \right) \end{pmatrix} \quad (5.27)$$

sowie

$$\hat{f}_j(x) = \frac{e^{-ix(j-1)}}{1 - e^{i(x+i\varepsilon)}} \quad , \quad b_q = \left((1 - \alpha_1 e^{iq}) \left(1 - \frac{e^{iq}}{\alpha_2} \right) \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5.28)$$

Der Vakuumerwartungswert für μ_j ist die Magnetisierung (4.30)

$$\langle \mu_j \rangle = M = \left(1 - (\operatorname{sh} x_1 \operatorname{sh} x_2)^{-2} \right)^{\frac{1}{8}} \quad (5.29)$$

und gibt das richtige Verhalten für $T \rightarrow T_c$ wieder.

In diesem Ausdruck (5.26) kann der Kontinuumlimes durchgeführt werden. Der Skalenfaktor $\langle \mu_j \rangle$ ist in diesem Grenzwert die Renormierungskonstante und es gilt mit den Normierungsbedingungen (2.53) und (2.54) für den renormierten Operator

$$\mu_r(x) = e^{\frac{1}{2} S(x)} \quad (5.30)$$

mit

$$R_x(p, p') = \begin{pmatrix} e^{-ix(p+p')} \frac{E_p - E_{p'}}{p + p'} & -ie^{-ix(p-p')} \frac{E_p + E_{p'}}{p - p' + i\varepsilon} \\ -ie^{ix(p-p')} \frac{E_p + E_{p'}}{p - p' - i\varepsilon} & -e^{ix(p+p')} \frac{E_p - E_{p'}}{p + p'} \end{pmatrix} \quad (5.31a)$$

$$\vartheta(x) = \iint \frac{dp dp'}{2\pi \sqrt{E_p E_{p'}}} (\xi_{p'}^+, \xi_p) R_x(p, p') \begin{pmatrix} \xi_{p'}^+ \\ \xi_{p'} \end{pmatrix} \quad (5.31b)$$

und $x = (j-1)t$.

Der renormierte Kinkoperator oder Unordnungsparameter läßt sich also im Kontinuumlimes durch die renormierten Impulskomponenten $\xi_p = \sqrt{\frac{M|t|}{2\pi}} \xi_q$, die die Theorie linearisierten, darstellen.

Wir möchten betonen, daß man nach (5.30) (schon angedeutet in (5.21)) unendlich viele Basisfeldkomponenten ξ_p^+ benötigt, um den "Teilchenfeldoperator $\mu(x)$ " zu erzeugen. Die Beziehung (5.30) ist in höchstem Maße nichtlokal, d.h. sie läßt sich nicht durch $\mu(x) = \mu(\psi(x))$ ausdrücken. Anschaulich können wir uns das " μ -Teilchen" als eine Wolke von Fermionenpaaren vorstellen. In analoger Weise können wir den Kontinuumlimes des Ordnungsparameter

$$\sigma_j = (c_j + c_j^+) \mu_j \quad (5.32)$$

berechnen.

Es ergibt sich der normalgeordnete Ausdruck

$$\sigma_j = \langle \mu_j \rangle \times \psi_0(j) e^{\frac{1}{2M} \sum_{qq'} (\xi_q^+, \xi_q) \hat{R}_{j,qq'} \begin{pmatrix} \xi_{q'}^+ \\ \xi_{q'} \end{pmatrix}} \times \quad (5.33)$$

mit R_j aus (5.27) und

$$\psi_0(j) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_q \frac{1}{|b_q|} \left[e^{-iqj + i\frac{\pi}{4}} \xi_q^+ + e^{iqj - i\frac{\pi}{4}} \xi_q \right] \quad (5.34)$$

Im Kontinuumlimes ergibt sich für den renormierten Operator $\sigma_r(x)$

$$\sigma_r(x) = \times \psi_0(x) e^{\frac{1}{2} \vartheta(x)} \times \quad (5.35)$$

$$\psi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\alpha}} \int \frac{dp}{\sqrt{2\pi}} \left[e^{-i(xp - \frac{\pi}{4})} \xi_p^+ + e^{i(xp - \frac{\pi}{4})} \xi_p \right] \quad (5.36)$$

Wir sehen, daß $\psi_0(x)$ nicht einfach der Kontinuumlimes des Dressingoperators $(c_j + c_j^+)$ ist, der in Kap. 2.8 berechnet wurde.

Die "Dressing"relation (5.34) geht also im Kontinuumlimes in die Beziehung

$$\begin{aligned}\mu_r(x) &= \underset{x}{x} e^{\frac{g(x)}{2}} \underset{x}{x} \\ \sigma_r(x) &= \underset{x}{x} \psi_0(x) e^{\frac{g(x)}{2}} \underset{x}{x}\end{aligned}\quad (5.37)$$

über.

Im Kontinuumlimes ist also $\psi_0(x)$ als Dressingoperator anzusehen. Unter der Z_2 -Symmetrie des Ising-Modells transformieren sich die fermionischen Basisvariablen und $\psi_0(x)$

$$\begin{aligned}\xi_q &\longmapsto -\xi_q \\ \xi_q^+ &\longmapsto -\xi_q^+ \\ \psi_0(x) &\longmapsto -\psi_0(x)\end{aligned}\quad (5.38)$$

und die Teilchenfelder

$$\begin{aligned}\mu_r(x) &\longmapsto \mu_r(x) \\ \sigma_r(x) &\longmapsto -\sigma_r(x)\end{aligned}\quad (5.40)$$

Betrachten wir wie im Vorangegangenen $T > T_c$ so hat die Theorie einen eindeutigen, nicht entarteten Grundzustand und die Z_2 -Symmetrie ist durch das Vakuum nicht gebrochen ($|0\rangle \rightarrow |0\rangle$), da

$$\langle \sigma_r(x) \rangle^2 = \lim_{|x| \rightarrow \infty} \langle \sigma_r(0) \sigma_r(x) \rangle = 0 \quad (5.41)$$

Wir befinden uns damit in der symmetrischen Phase, da nur der Z_2 -Skalar einen nichtverschwindenden VEW besitzt. Obwohl wir es hier nicht mit spontaner Symmetriebrechung (SSB) zu tun haben, wird durch die Z_2 -Symmetrie des Systems eine Proliferation des $\psi(x)$ in die beiden Felder $\mu(x)$ und $\sigma(x)$ getriggert. Man darf natürlich bei der Frage nach der SSB nicht übersehen, daß bei obiger Theorie die Existenz einer kritischen Temperatur T_c eine notwendige Bedingung ist. Ordnet man dem Skalar $\mu(x)$ die Gruppen-

identität zu, so ist dem einzigen nichttrivialen Element der Gruppe Z_2 der Dressingoperator $\psi_0(x)$ zugeordnet. Dieser Dressingoperator trägt das Transformationsverhalten des entsprechenden Teilchenfeldes $\sigma(x)$.

3. Die Dynamik in den Teilchenfeldoperatoren

Wir wollen die Feldgleichungen von Kap. 2.4 umschreiben auf die Operatoren $\sigma_j = \sigma_j^1$ und $\mu_j = \prod_{i=1}^{j-1} (-\sigma_i^3)$. Aus der Diracgleichung (2.41) (falls rechte Seite vernachlässigt) ergibt sich die Klein-Gordongleichung für die Komponenten

$$\psi_j^1 = \sigma_j \mu_j \quad (5.42a)$$

$$i \psi_j^2 = \sigma_j \mu_{j+1} \quad (5.42b)$$

Es gilt somit

$$(\square + m^2) \sigma_j \mu_j = 0 \quad (5.43a)$$

$$(\square + m^2) \sigma_j \mu_{j+1} = 0 \quad (5.43b)$$

mit den Vertauschungsrelationen (5.18),

$$[\mu_j, \mu_l] = [\sigma_j, \sigma_l] = 0 \quad (5.44)$$

$$\mu_l \sigma_j = \pm \sigma_j \mu_l \quad \text{falls} \quad \begin{matrix} l \leq j \\ l > j \end{matrix} \quad (5.45)$$

und $\square = \partial_0^2 - \partial_1^2$.

Wir leiten nun die Dynamik der einzelnen Felder σ und μ mit folgender auf die neuen Operatoren umgeschriebenen Transfermatrix ab.

$$V_1 = (2 \operatorname{sh} x_1)^{\frac{M}{2}} e^{u_1 \sum_j \mu_j \mu_{j+1}} \quad (5.46)$$

$$V_2 = e^{\frac{x_2}{2} \sum_j \sigma_j \sigma_{j+1}} \quad (5.47)$$

Mit den Kommutatorregeln (5.44, 45) ergibt sich nach etwas rechnen:

$$\dot{\mu}_j = \delta_\tau \mu_j = \frac{V_a \mu_j V_a^{-1} - \mu_j}{\tau} = \frac{\operatorname{ch} x_2 - 1}{\tau} \mu_j + \frac{\operatorname{sh} x_2}{\tau} \mu_{j-1} \mu_j \mu_{j+1} \quad (5.48)$$

$$\dot{\sigma}_j = \delta_\tau \sigma_j = \frac{V_b \sigma_j V_b^{-1} - \sigma_j}{\tau} = \frac{\operatorname{ch} 2u_1 - 1}{\tau} \sigma_j - \frac{\operatorname{sh} 2u_1}{\tau} \sigma_j \mu_j \mu_{j+1} \quad (5.49)$$

und damit die Vertauschungsrelationen

$$[\dot{\mu}_j, \mu_i] = 0 \quad (5.50)$$

$$[\dot{\sigma}_j, \sigma_i] = \frac{\operatorname{sh} 2u_1}{\tau} \delta_{ij} \mu_j \mu_{j+1} \quad (5.51)$$

In dieser Form der Feldgleichungen läßt sich der Kontinuums- $\limes$ nicht durchführen, da die Ausdrücke $\frac{\operatorname{sh} y}{\tau}$ sowie $\frac{\operatorname{ch} y - 1}{\tau}$ divergieren. Um die Dynamik der σ und μ -Freiheitsgrade im Kontinuums- $\limes$ zu bekommen, wollen wir deshalb vom Hamiltonoperator in Kap. 2.7 ausgehen. In den dort auftretenden Freiheitsgraden ξ_q, ξ_q^+ war der Kontinuums- $\limes$ wohldefiniert.

Mit den Fourierkomponenten

$$\frac{1}{\sqrt{1-\alpha}} e^{-i\frac{\pi}{4}} \xi_p = \int \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} e^{-ipx} \psi_0^{(-)}(x) \quad (5.52)$$

ist der Hamiltonoperator (2.95)

$$H = (1-\alpha) \int dx dx' \left[\int dp \sqrt{\mu^2 + p^2} e^{-ip(x-x')} \right] \psi_0^{(+)}(x) \psi_0^{(-)}(x') \quad (5.53)$$

Wir wollen nun versuchen, mit Hilfe der Dressingrelationen (5.37) diesen Hamiltonoperator umzuschreiben auf die Felder μ_r und σ_r . Die Dressing-

relation (5.37) kann ohne Normalordnung geschrieben werden:

$$\bar{\psi}_r(x) = \psi_0^{(+)}(x) \mu_r(x) + \mu_r(x) \psi_0^{(-)}(x) \quad (5.54)$$

mit $\psi^{(\pm)}$ nach (5.52).

Neben dem Dressingoperator $\psi_0(x) = \psi_0^{(-)}(x) + \psi_0^{(+)}(x)$ benötigen wir zu dieser Umschreibung noch ein Feld $\tilde{\psi}_0(x)$

$$\tilde{\psi}_0(x) = \psi_0^{(-)}(x) - \psi_0^{(+)}(x) \quad (5.55)$$

Mit diesem Feld ergibt sich ein Hilfsfeld $\tau_r(x)$

$$\tau_r(x) := \int_x \tilde{\psi}_0(x) e^{\frac{g(x)}{2}} \int_x \quad (5.56)$$

Einfache Algebra ergibt für die Komponenten des Dressingoperators

$$\begin{aligned} \mu_r(x) \psi_0^{(-)}(x) &= \frac{1}{2} (\bar{\psi}_r + \tau_r) \\ \psi_0^{(+)}(x) \mu_r(x) &= \frac{1}{2} (\bar{\psi}_r - \tau_r) \end{aligned} \quad (5.57)$$

Für den Fall $T > T_c$ ist der Vakuumerwartungswert des Unordnungsparameter $\mu_r(x)$ nicht Null. Wir entwickeln deshalb den Feldoperator

$$\mu_r(x) = \langle \mu_r(x) \rangle + \tilde{\mu}(x) \quad (5.58)$$

um diesen Erwartungswert.

Damit ist

$$\psi_0^{(-)}(x) = \frac{1}{2 \langle \mu_r \rangle} (\bar{\psi}_r + \tau_r) - \frac{1}{\langle \mu_r \rangle} \tilde{\mu}(x) \psi_0^{(-)}(x) \quad (5.59a)$$

$$\psi_0^{(+)}(x) = \frac{1}{2 \langle \mu_r \rangle} (\bar{\psi}_r - \tau_r) - \frac{1}{\langle \mu_r \rangle} \psi_0^{(+)}(x) \tilde{\mu}(x) \quad (5.59b)$$

Nimmt man an, daß eine Entwicklung um den klassischen Wert sinnvoll ist, d.h. falls

$$\left\| \frac{\tilde{\mu}(x)}{\langle \mu_r \rangle} \right\| \ll 1 \quad (5.60)$$

gilt, so kann man die Gleichung (5.59) iterativ lösen ($\| \|$ = Operatornorm).

In Kap. 4 berechneten wir

$$\langle \mu_r(x) \rangle = 1 \quad (5.61)$$

Somit ergibt sich

$$\begin{aligned} 4 \psi_{\sigma}(x) \psi_{\sigma}(x') &= \sigma_r(x) \sigma_r(x') - \tau_r(x) \tau_r(x') + \sigma_r(x) \tau_r(x') - \tau_r(x) \sigma_r(x') \\ &- (\sigma_r(x) - \tau_r(x)) (\tilde{\mu}(x) + \tilde{\mu}(x')) (\sigma_r(x') + \tau_r(x')) \\ &+ \text{Terme der Ordnung (Feld)}^4 \end{aligned} \quad (5.62)$$

Dieser Ausdruck wird in den Hamiltonoperator (5.53) eingesetzt. Er enthält somit Terme beliebig hoher Produkte der Operatoren σ , τ und μ .

Der erste Term im Ausdruck (5.62), im Hamiltonoperator eingesetzt, ergibt den freien Anteil des Ordnungsparameterfeldes σ .

Wir wollen hier nicht die Konsequenzen aus der Beschreibung der Dynamik durch (5.62) diskutieren. Es genügt uns hier festzustellen, daß der Hamiltonoperator durch eine nichtlokale Überlagerung von Produkten der Felder σ , τ und μ dargestellt werden kann.

$$H = H(\sigma, \mu, \tau) \quad (5.63)$$

Falls dieser Hamiltonoperator sich näherungsweise durch ein Integral über eine Hamiltondichte darstellen läßt, erhalten wir damit eine Beschreibung der Dynamik durch einen effektiven Hamiltonoperator, aus dem wir Massen und Kopplungen der wechselwirkenden Felder ablesen können.

4. Zusammenfassung und offene Fragen

Durch genaue Analyse der Feldoperatoren μ_j und σ_j bezüglich eines Hilbertraums, der von den Basiskomponenten des Majoranafeldes ξ_q erzeugt wird, ergab sich die Dressingbeziehung (5.37). Sie ersetzte die auf dem Gitter gültige einfachere Beziehung (5.8), von der aber ohne weiteres nicht der Kontinuumsfall genommen werden kann. Da die Dressingbeziehung auf dem Gitter (5.8) mit bedeutend geringeren Aufwand abgeleitet werden konnte, wäre es interessant zu untersuchen, ob eine Operatorproduktentwicklung der Art (5.20), also

$$\begin{pmatrix} \sigma(x) \\ i\tau(x) \end{pmatrix} = \lim_{x \rightarrow y} \begin{pmatrix} \psi^1(y) \\ \psi^2(y) \end{pmatrix} \mu(x) \quad (5.64)$$

die analog zu (5.8) geschrieben ist, wirklich die exakte Kontinuumsversion (5.37) reproduzieren würde.

Eine Auflösung der Beziehung (5.64) nach dem Basisfeld $\psi(x)$ müßte unter dem Grenzwert $x \xrightarrow{1} y$ möglich sein. Setzt man diese nach dem Basisfeld aufgelöste Dressingrelation in den Hamiltonoperator eines Majoranafeldes ein, hätte man eine weitere Möglichkeit, um von der Basis-Dynamik zur phänomenologischen Teilchendynamik zu kommen. In Kap. 5.3 wurde statt dessen ein semiklassischer Ansatz für das, einen Vakuum Erwartungswert entwickelnde, μ -Feld

$$\mu_r = \langle \mu_r \rangle + \tilde{\mu}_{\text{Quantenkorrekturen}} \quad (5.65)$$

benützt. Die Rolle des bei dieser Invertierung der Dressingrelation (5.37) notwendigen τ -Felder in der Teilchenfelddynamik müßte näher untersucht werden. Die Frage, ob zur Identifikation der Teilchenfelder in komplizierten Theorien eine Dressingbeziehung der Art (5.64) genügen kann oder ob es wie in unserem Fall eine Analyse der Randbedingungen (Zeit $\rightarrow \pm \infty$) notwendig ist, ist noch nicht geklärt. Es ist eine bedeutend schwierigere Frage, ob aus gruppentheoretischen Überlegungen (und evtl. Randbedingungsüberlegungen, wie in unserem Fall) eine Dressingbeziehung angegeben werden kann, die dann zu den phänomenologischen Feldern führt. In unserer Modelltheorie ließ sich

die Dressingrelation (5.64) ableiten. Die Basis- wie Teilchenfelder selbst waren vorher definiert.

Da Randbedingungen bei der Proliferation des Basisfeldes $\psi(x)$ eine Rolle spielen und man im Fall von spontaner Symmetriebrechung (SSB) eine starke Beziehung [57] zwischen Randbedingungen und Entartung des Grundzustandes beobachtet, kann es eventuell sein, daß eine Analyse des Grundzustandes eine Identifikation der Teilchenfelder ermöglicht. In unserem Modell haben wir zwar gesehen, daß die SSB keine notwendige Voraussetzung für Proliferation ist; sie wird aber indirekt durch das Vorhandensein einer kritischen Temperatur T_c ins Spiel kommen.

Die Symmetrie der Basisdynamik (ob gebrochen oder nicht), spielt in der Dressingrelation (5.8) sowie (5.37) eine wichtige Rolle. Bereits in unserer Modelltheorie ist die Dynamik in den Teilchenfeldern, beschrieben durch (5.53) mit (5.62), sehr kompliziert. Für den realistischen Fall sollte man deshalb keine einfache Dynamik erwarten. In höheren Dimensionen werden die Relationen zwischen dem Basisfeld und den Teilchenfeldern immer nichtlokaler, d.h. wir werden Operatoren auf Linien und Flächen zu betrachten haben (siehe Ende Kap. 4.1). Man wird also für $d = 4$ auf eine QFT nichtlokaler Felder geführt. Die Hoffnung besteht darin, je nach Energiebereich verschiedene lokale Näherungen dieser QFT zu finden, die dann mit den phänomenologischen Theorien verglichen werden können.

Schlußfolgerungen und mögliche Perspektiven

Wir haben gesehen, daß der Übergang von der lokalen Dynamik, beschrieben durch das Majoranafeld $\psi_M(x)$, zur asymptotischen Dynamik, beschrieben durch die Teilchenfelder $\sigma(x)$ und $\mu(x)$, durch die "Dressingrelation" (5.37) charakterisiert ist. Das Ordnungs- bzw. Unordnungsparameterfeld, das sind die den Streuexperimenten angepaßten Felder, können wir uns als Wolke von Fermionpaaren, die ein nacktes Majoranateilchen umgibt, bzw. als isolierte Wolke allein vorstellen. Dieser komplizierte Dressingmechanismus wird durch das Verlangen nach einfachen Randbedingungen an die asymptotischen Teilchenfelder getriggert. Interessant und wichtig für die Verallgemeinerung auf mehr als zwei Dimensionen scheint die Tatsache zu sein, daß im Skalenlimes zur Beschreibung des Spektrums Eigenschaften von beiden Seiten des kritischen Punktes eingehen. Die Korrelationsfunktion des Ordnungsparameters $\sigma(x)$ in der spontan gebrochenen Phase ($T < T_C$) taucht als Propagator eines Unordnungsparameters $\mu(x)$ im Bereich $T > T_C$ wieder auf.

Im realistischen Fall von vier Dimensionen müßte man die im Skalenlimes relevanten Felder (also diejenigen, die nicht aussterben, siehe Kap. 3.5) sowohl in der spontan gebrochenen ($T < T_C$) Phase, als auch in der Phase mit nichtentartetem Grundzustand ($T > T_C$) untersuchen.

Auf eine mögliche Beziehung zur nichtlinearen Spinortheorie von Heisenberg bezüglich des Aspekts von selbstwechselwirkenden Fermionen [1,60] sei hier noch hingewiesen. Betrachtet man die fermionische Darstellung der Wirkung des Ising-Modells in (1+3)-Dimensionen [25], so stellt man fest, daß man es hier mit selbstwechselwirkenden fermionischen Freiheitsgraden zu tun hat. Im Skalenlimes, falls er eine relativistisch invariante Theorie ergibt, werden damit vermutlich Spinorfelder eine wichtige Rolle spielen. Den Schwierigkeiten der Spinortheorie, was die Renormierbarkeit und indefinite Metrik betrifft, könnte man dadurch entgehen, daß man direkt von der Gitterformulierung ausgeht und schon dort die asymptotischen Felder identifiziert. Auch Gitterrechnungen auf dem Computer wären denkbar.

Ich danke Herrn Dr. H. Saller, der diese Arbeit betreut hat, sowie Herrn Professor Dr. H.P. Dürr und zahlreichen Mitarbeitern des Max-Planck-Instituts für Physik und Astrophysik für nützliche Gespräche.

Anhang A

Dynamik der Fermionen c_j, c_j^+

Hier soll die Dynamik der Operatoren c_k, c_k^+ berechnet werden. Wir benützen die Paulion-Darstellung der Transfermatrix $V = V_1^{\frac{1}{2}} V_2 V_1^{\frac{1}{2}}$ also $V_1 = (2\text{sh}x)^{\frac{M}{2}} e^{-u \sum_j \sigma_j^3}$ und $V_2 = e^{\frac{y}{2} \sum_j \sigma_j^1 \sigma_{j+1}^1}$ ($x_1 = x; u_1 = u; x_2 = y$). Aus der Algebra der Paulionen $\sigma_j^1 \sigma_j^2 = i \sigma_j^3$ (und zyklisch) ergeben sich für die Operatoren

$$\begin{aligned} x_j &= 1 + \sigma_{j-1}^1 \sigma_{j+1}^1 \\ y_j &= \sigma_{j-1}^1 \sigma_j^1 + \sigma_j^1 \sigma_{j+1}^1 \\ z_j &= \sigma_{j-1}^1 + \sigma_{j+1}^1 \end{aligned} \quad (\text{A1})$$

folgende Vertauschungsrelationen und Produkte

$$[\sigma_j^\alpha, x_j] = [\sigma_j^\alpha, z_j] = 0; [\sigma_j^\alpha, y_j] = z_j [\sigma_j^\alpha, \sigma_j^1] = \begin{cases} 0 \\ -2i \sigma_j^3 z_j \\ 2i \sigma_j^2 z_j \end{cases} \quad (\text{A2})$$

$$\begin{aligned} y_j z_j &= 2 x_j \sigma_j^1 & z_j \sigma_j^1 &= y_j & \sigma_j^2 y_j &= -i \sigma_j^3 z_j \\ x_j z_j &= 2 z_j & y_j^2 &= 2 x_j & \sigma_j^3 y_j &= i \sigma_j^2 z_j \\ y_j x_j &= 2 y_j & [\sigma_j^\alpha, y_j]_+ &= 0 & \text{für } \alpha &= 2, 3 \end{aligned} \quad (\text{A3})$$

Beziehungen (A2) und A3) liefern für den Operator $e^{\pm \frac{y}{2} y_j}$

$$e^{\pm \frac{y}{2} y_j} = 1 + \frac{\text{ch} y - 1}{2} x_j \pm \frac{\text{sh} y}{2} y_j \quad (\text{A4})$$

Beweis durch Potenzreihenvergleich.

Für die Dynamik der Paulionen ergibt sich

$$\begin{aligned} V_1^{\frac{1}{2}} \sigma_j^1 V_1^{-\frac{1}{2}} &= e^{-u \sigma_j^3} \sigma_j^1 = \sigma_j^1 e^{u \sigma_j^3} \\ V_1^{\frac{1}{2}} \sigma_j^2 V_1^{-\frac{1}{2}} &= e^{-u \sigma_j^3} \sigma_j^2 = \sigma_j^2 e^{u \sigma_j^3} \\ V_1^{\frac{1}{2}} \sigma_j^3 V_1^{-\frac{1}{2}} &= \sigma_j^3 \end{aligned} \quad (\text{A5})$$

Es wurde $e^{\pm \frac{u}{2} \sigma_j^3} = \cosh \frac{u}{2} \pm \sinh \frac{u}{2} \sigma_j^3$ und die Beziehungen für den doppelten Winkel der Hyperbelfunktionen verwendet.

$$\begin{aligned} V_2 \sigma_j^1 V_2^{-1} &= \sigma_j^1 \\ V_2 \sigma_j^2 V_2^{-1} &= e^{\gamma \gamma_j} \sigma_j^2 = \sigma_j^2 e^{-\gamma \gamma_j} \\ V_2 \sigma_j^3 V_2^{-1} &= e^{\gamma \gamma_j} \sigma_j^3 = \sigma_j^3 e^{-\gamma \gamma_j} \end{aligned} \quad (A6)$$

Hier wurde (A2, A4) verwendet.

Aus (A5) und (A6) folgt für $\sigma^\pm = \frac{1}{2} (\sigma^1 \pm i \sigma^2)$

$$\begin{aligned} V_1^{\frac{1}{2}} \sigma_j^\pm V_1^{-\frac{1}{2}} &= e^{-u \sigma_j^3} \sigma_j^\pm = \sigma_j^\pm e^{u \sigma_j^3} \\ V_2 \sigma_j^\pm V_2^{-1} &= \frac{1}{2} (\sigma_j^1 \pm i e^{\gamma \gamma_j} \sigma_j^2) \end{aligned} \quad (A7)$$

Die Dynamik des "String"operators $t_j = j_{\Pi}^{-1} (-\sigma_i^3)$ folgt aus

$$\begin{aligned} V_1^{\frac{1}{2}} t_j V_1^{-\frac{1}{2}} &= t_j \\ V_2 t_j V_2^{-1} &= e^{\gamma \sigma_{j-1}^1 \sigma_j^1} t_j = \cosh \gamma t_j + i \sinh \gamma \sigma_j^1 \sigma_j^2 t_{j-1} \end{aligned} \quad (A8)$$

Für die Operatoren $c_j = t_j \sigma_j^-$ und $c_j^+ = t_j \sigma_j^+$ ergibt sich

$$\begin{aligned} V_1^{\frac{1}{2}} c_j V_1^{-\frac{1}{2}} &= t_j \sigma_j^- e^{u \sigma_j^3} = c_j e^u \\ V_1^{\frac{1}{2}} c_j^+ V_1^{-\frac{1}{2}} &= t_j \sigma_j^+ e^{u \sigma_j^3} = c_j^+ e^{-u} \end{aligned} \quad (A9)$$

Bei der letzten Gleichheit wurde $c_j \sigma_j^3 = c_j$ bzw. $c_j^+ \sigma_j^3 = -c_j^+$ verwendet.

$$\begin{aligned} V_2 c_j V_2^{-1} &= \frac{1}{2} \left\{ e^{\gamma \sigma_{j-1}^1 \sigma_j^1} t_j \sigma_j^1 - i e^{\gamma \sigma_{j-1}^1 \sigma_j^1} t_j e^{\gamma \gamma_j} \sigma_j^2 \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \cosh \gamma t_j \sigma_j^1 + \sinh \gamma \sigma_{j-1}^1 t_j - i (\cosh \gamma t_j \sigma_j^2 + \sinh \gamma \sigma_{j+1}^1 \sigma_j^1 t_j \sigma_j^2) \right\} \\ &= \cosh \gamma c_j + \frac{\sinh \gamma}{2} \left\{ (c_{j-1}^+ - c_{j-1}) - (c_{j+1}^+ + c_{j+1}) \right\} \\ V_2 c_j^+ V_2^{-1} &= \cosh \gamma c_j^+ + \frac{\sinh \gamma}{2} \left\{ (c_{j-1}^+ - c_{j-1}) + (c_{j+1}^+ + c_{j+1}) \right\} \end{aligned} \quad (A10)$$

Für die Dynamik der c_j bzw. c_j^+ ergibt sich aus (A9) und (A10)

$$\begin{aligned} V c_j V^{-1} &= e^{2u} \operatorname{ch} \gamma c_j + \frac{\operatorname{sh} \gamma}{2} [(c_{j-1}^+ - c_{j+1}^+) - e^{2u} (c_{j-1} + c_{j+1})] \\ V c_j^+ V^{-1} &= e^{-2u} \operatorname{ch} \gamma c_j^+ + \frac{\operatorname{sh} \gamma}{2} [e^{-2u} (c_{j-1}^+ + c_{j+1}^+) + (c_{j+1} - c_{j-1})] \end{aligned} \quad (\text{A11})$$

Für die Spinorkomponenten $\psi_j^1 = c_j^+ + c_j$ und $i\psi_j^2 = c_j^+ - c_j$ folgt

$$\begin{aligned} V \psi_j^1 V^{-1} &= \operatorname{ch} \gamma (\operatorname{ch} 2u \psi_j^1 - i \operatorname{sh} 2u \psi_j^2) + \frac{\operatorname{sh} \gamma}{2} \{ i \psi_{j-1}^2 - i \psi_{j+1}^2 + \\ &\quad + \operatorname{ch} 2u (i \psi_{j-1}^2 + i \psi_{j+1}^2) - \operatorname{sh} 2u (\psi_{j-1}^1 + \psi_{j+1}^1) \} \\ i V \psi_j^2 V^{-1} &= \operatorname{ch} \gamma (i \operatorname{ch} 2u \psi_j^2 - \operatorname{sh} 2u \psi_j^1) + \frac{\operatorname{sh} \gamma}{2} \{ \psi_{j+1}^1 - \psi_{j-1}^1 + \\ &\quad + \operatorname{ch} 2u (\psi_{j-1}^1 + \psi_{j+1}^1) - \operatorname{sh} 2u (i \psi_{j-1}^2 + i \psi_{j+1}^2) \} \end{aligned} \quad (\text{A12})$$

Unter folgenden Differenzierbarkeitsbedingungen

$$1) \quad \psi_{j+1}^\alpha + \psi_{j-1}^\alpha \approx 2 \psi_j^\alpha \quad (\text{A13})$$

$$2) \quad \psi_{j+1}^\alpha - \psi_{j-1}^\alpha \approx 2(\psi_j^\alpha - \psi_{j-1}^\alpha) \approx 2(\psi_{j+1}^\alpha - \psi_j^\alpha) \quad (\text{A14})$$

gilt

$$\begin{aligned} V \psi_j^1 V^{-1} &= \operatorname{ch}(\gamma - 2u) \psi_j^1 + i \operatorname{sh}(\gamma - 2u) \psi_j^2 - i \operatorname{sh} \gamma (\psi_{j+1}^2 - \psi_j^2) \\ V \psi_j^2 V^{-1} &= \operatorname{ch}(\gamma - 2u) \psi_j^2 - i \operatorname{sh}(\gamma - 2u) \psi_j^1 - i \operatorname{sh} \gamma (\psi_{j+1}^1 - \psi_j^1) \end{aligned} \quad (\text{A15})$$

Anhang B

Entwicklungen um die kritische Temperatur

Hier sollen verschiedene Formeln, die für die Entwicklung nach dem Parameter "t" wichtig sind, berechnet werden.

$t = 0$ bedeutet $T = T_c$ oder $\text{sh } x_{1c} \text{ sh } x_{2c} = 1$ oder $\text{th} \frac{x_{2c}}{2} e^{x_{1c}} = 1$

$$x_{1c} = \frac{2J_1}{T_c} ; \quad x_{2c} = \frac{2J_2}{T_c} \quad (\text{B1})$$

$$x_1 = \frac{2J_1}{T} = \frac{2J_1}{T_c} \frac{T_c}{T} = \frac{x_{1c}}{1+t} \approx x_{1c}(1-t) ; \quad x_2 = \frac{x_{2c}}{1+t} \approx x_{2c}(1-t) \quad (\text{B2})$$

Damit ergeben sich folgende Entwicklungen

$$\text{th } u_1 = e^{-x_1} = e^{-x_{1c}} (1 + x_{1c} t + \sigma(t^2)) \approx \sqrt{\alpha} (1 + x_{1c} t) \quad (\text{B3})$$

$$z_1 = \text{th} \frac{x_1}{2} = \frac{1}{\varepsilon} (1 - k \frac{\mu + \mu'}{2} t + \sigma(t^2)) \quad (\text{B4})$$

$$z_2 = \text{th} \frac{x_2}{2} = \sqrt{\alpha'} (1 - \frac{\mu - \mu'}{2} t + \sigma(t^2)) \quad (\text{B5})$$

mit den Abkürzungen

$$\alpha = e^{-2x_{1c}} ; \quad \varepsilon = \frac{1 + \sqrt{\alpha'}}{1 - \sqrt{\alpha'}} ; \quad k = \frac{2\sqrt{\alpha'}}{1 - \alpha} ; \quad \eta = \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} \quad (\text{B6})$$

$$\mu = x_{1c} + \frac{x_{2c}}{\text{sh } x_{2c}} ; \quad \mu' = x_{1c} - \frac{x_{2c}}{\text{sh } x_{2c}}$$

$$\alpha_1 = e^{-x_1} z_2 = \alpha (1 + \mu' t + \sigma(t^2)) \quad (\text{B7})$$

$$\alpha_2 = \frac{e^{-x_1}}{z_2} = 1 + \mu t \quad (\text{B8})$$

$$\operatorname{sh} x_2 = k \left(1 - \eta \frac{\mu - \mu'}{2} t + \sigma(t^2) \right) = \frac{2z_2}{1 - z_2^2} \quad (\text{B9})$$

$$\operatorname{ch} x_2 = \eta \left(1 - \frac{k^2}{\eta} \frac{\mu - \mu'}{2} t + \sigma(t^2) \right) = \frac{1 + z_2^2}{1 - z_2^2} \quad (\text{B10})$$

$$\operatorname{ch} 2u_1 = \eta \left(1 + \frac{k^2}{\eta} \frac{\mu + \mu'}{2} t + \sigma(t^2) \right) = \frac{1 + z_1^2}{2z_1} \quad (\text{B11})$$

$$\operatorname{sh} 2u_1 = k \left(1 + \eta \frac{\mu + \mu'}{2} t + \sigma(t^2) \right) = \frac{1 - z_1^2}{2z_1} \quad (\text{B12})$$

$$\text{mit } \frac{\mu + \mu'}{2} = x_{1c} \quad (\text{B13})$$

$$\frac{\mu - \mu'}{2} = x_{2c} \operatorname{sh} x_{1c} \quad (\text{B14})$$

$$\operatorname{sh}(x_2 - 2u_1) = \operatorname{sh} x_2 \operatorname{ch} 2u_1 - \operatorname{ch} x_2 \operatorname{sh} 2u_1 = -k \mu t \quad (\text{B15})$$

$$\operatorname{ch}(x_2 - 2u_1) = \operatorname{ch} x_2 \operatorname{ch} 2u_1 - \operatorname{sh} x_2 \operatorname{sh} 2u_1 = 1 + \sigma(t^2) \quad (\text{B16})$$

$$\operatorname{ch} 2u_1 \operatorname{sh} x_2 = \eta k \left(1 - \left(\frac{\mu}{2\eta} - \frac{k^2 + \eta^2}{2\eta} \mu' \right) t + \sigma(t^2) \right) \quad (\text{B17})$$

$$\operatorname{sh} 2u_1 \operatorname{sh}^2 \frac{x_2}{2} = \frac{k}{2} (\eta - 1) \left(1 - \left(\frac{\mu}{2} - \frac{\alpha + 3}{2(1 - \alpha)} \mu' \right) t + \sigma(t^2) \right) \quad (\text{B18})$$

$$\operatorname{sh} 2u_1 \operatorname{ch}^2 \frac{x_2}{2} = \frac{k}{2} (\eta + 1) \left(1 + \left(\frac{\mu}{2} + \frac{1 + 3\alpha}{2(1 - \alpha)} \mu' \right) t + \sigma(t^2) \right) \quad (\text{B19})$$

Für den bezüglich Raum-Zeit symmetrischen Fall, d.h. $a = \tau$ oder $k = 1$ gilt:

$$\operatorname{sh} x_{1c} = 1 \quad ; \quad x_{1c} = x_{2c} \quad (\text{B20})$$

$$\alpha^{SYM} = (\sqrt{2}-1)^2 \quad (B21)$$

$$z^{SYM} = z_1 = z_2 = \sqrt{2}-1 \quad (B22)$$

Folgende Abkürzungen sind nützlich

$$a = (1+z_1^2)(1+z_2^2) \quad (B23)$$

$$g_1 = 2z_2(1-z_1^2) \quad (B24)$$

$$g_2 = 2z_1(1-z_2^2) \quad (B25)$$

Anhang C

Berechnung der Fermion Korrelationen $\langle \eta_{ij}^+ \eta_{lk} \rangle$

(η steht für x, y, x^+, y^+)

In diesem Anhang sollen die Fermi-Propagatoren durch Fouriertransformation berechnet werden.

$$\eta_{ek} = \frac{1}{\sqrt{NM}} \sum_{pq} e^{i(pl+qk)} \eta_{pq} \quad (C1)$$

Als explizites Beispiel berechnen wir $\langle y_{00}^+ y_{lk} \rangle$

Es gilt

$$\langle y_{00}^+ y_{ek} \rangle = \frac{1}{NM} \sum_{pq} \sum_{p'q'} e^{i(lp+kq)} \langle y_{p'q'}^+ y_{pq} \rangle \quad (C2)$$

Für die Korrelationen $\langle y_{p'q'}^+ y_{pq} \rangle$ gibt es eine graphische Darstellung, die auf die vollständige Belegung des Fermigitters im Impulsraum mit Dimeren beruht (siehe Kap. 3.4)

$$\langle y_{p_1 q_1}^+ y_{p_2 q_2} \rangle = \frac{1}{Z} \int \prod_{pq \in BI + (0,0)} d\Omega_{pq} y_{p_1 q_1}^+ y_{p_2 q_2} \prod_{pq \in BI + (0,0)} e^{S_{pq}} \quad (C3)$$

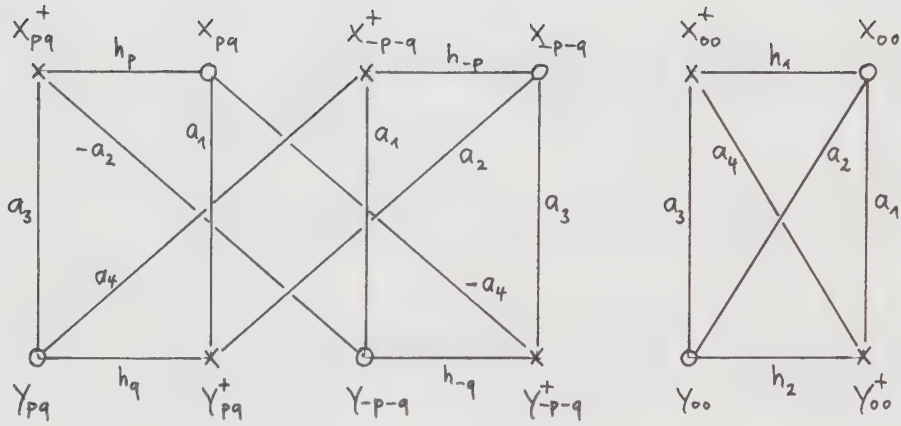
BI bedeutet Bereich I der Fig. 3.7

$$d\Omega_{pq} = dx_{pq} dx_{pq}^+ dy_{pq} dy_{pq}^+ dx_{-p-q} dx_{-p-q}^+ dy_{-p-q} dy_{-p-q}^+ \quad (C4)$$

$$d\Omega_{00} = dx_{00} dx_{00}^+ dy_{00} dy_{00}^+ \quad (C5)$$

Die Wirkung S_{pq} ist die aus Kap. 3.5 (3.35). (C3) gilt für $(p_1 q_1)$ und $(p_2 q_2) \in BI$.

Das Integral (C3) faktorisiert. Jeder Faktor, gekennzeichnet durch $(p, q) \in BI$ ist durch Fig. C1 dargestellt.



a) Bereich BI

Bereich BII

b) Nullmode

Fig. C1a) Die 12 Terme der Wirkung S_{pq} , dargestellt durch Dimer und seinen Gewichten h_p , h_q und a_i . Die Terme stehen in Normalordnung, d.h. die adjungierten Graßmannvariablen links der normalen.

b) Die 6 Terme des Nullmode S_{00} und seine Gewichte.

Die Summe aller Terme im Integral

$$Z_{pq} = \int d\Omega_{pq} e^{S_{pq}} \quad (C6)$$

ergibt die in Fig. C2 dargestellten 9 Möglichkeiten.

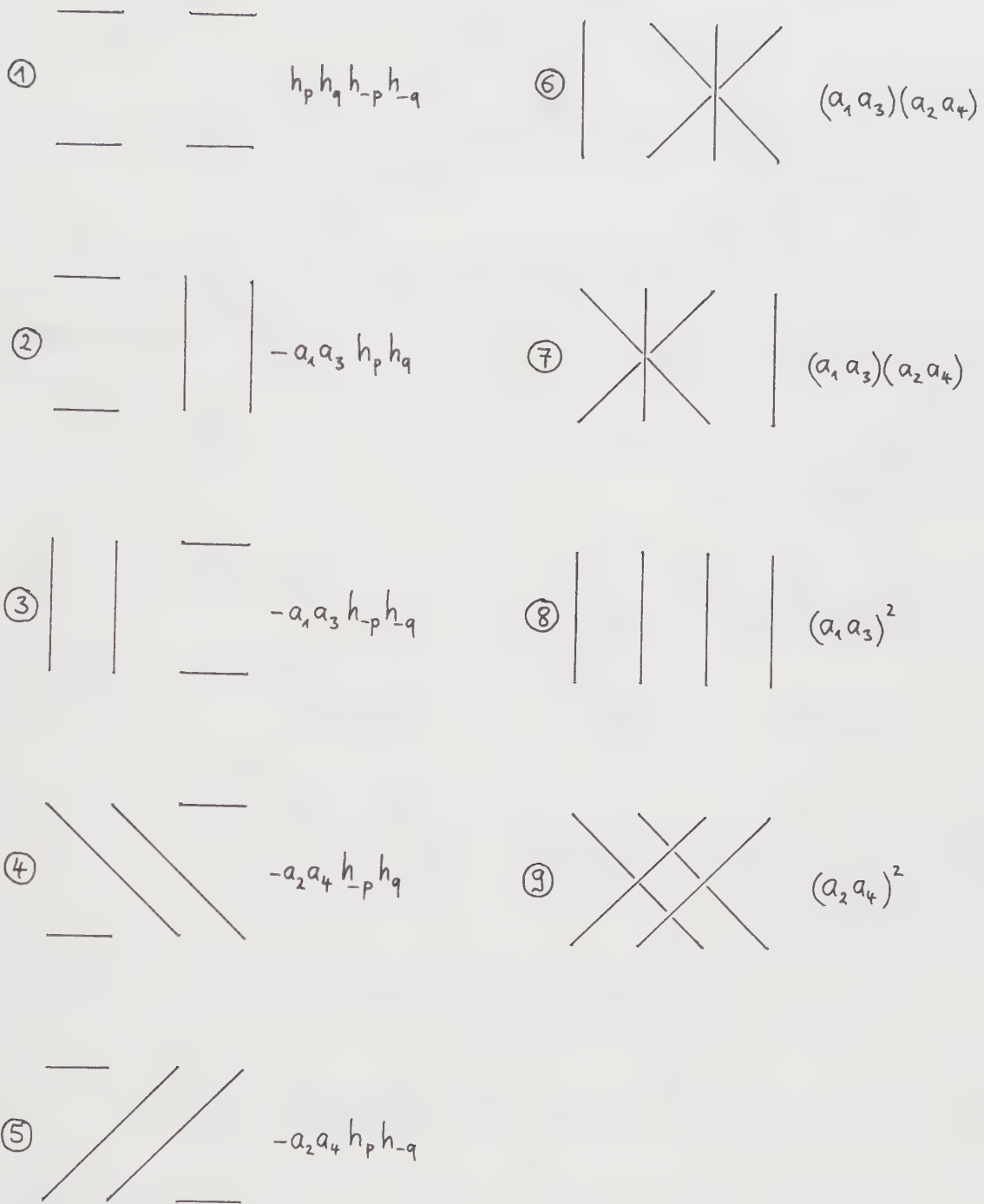


Fig. C2 Die Beiträge zum Graßmannintegral Z_{pq}

Die Summe dieser 9 Terme ergibt genau die bereits in Kapitel 3 berechnete
 $\det A_{pq} \equiv Z_{pq}$

$$Z_{pq} = h_p h_q h_{-p} h_{-q} - a_1 a_3 (h_p h_q + h_{-p} h_{-q}) - a_2 a_4 (h_p h_q + h_{-p} h_{-q}) + (a_1 a_3 + a_2 a_4)^2 \quad (C7)$$

Da die Wirkung keine Terme enthält, die zwischen verschiedenen (p,q) vermitteln, gibt es keine Möglichkeit, das Gitter, auf dem bereits ein Dimer $Y_{p_1 q_1}^+ Y_{p_2 q_2}$ mit $(p_1, q_1) \neq (p_2, q_2)$ belegt wurde vollständig durch Wirkungsdimer zu besetzen.

Nichtverschwindende Resultate erhält man also nur, falls $(p_1, q_1) = (p_2, q_2)$.

Wir unterscheiden 3 Fälle:

- 1) $(p_1, q_1) \in \text{BI}$. In diesem Fall wird der linke untere Dimer belegt. Es tragen also nur die Terme ①, ② und ④ der Fig. C2 bei

$$\langle Y_{pq}^+ Y_{pq} \rangle = \frac{1}{Z_{pq}} (h_p h_{-p} h_{-q} - a_1 a_3 h_p - a_2 a_4 h_{-p}) \quad (C8)_1$$

- 2) $(p_1, q_1) \in \text{BII}$. Hier wird der rechte untere Dimer der Fig. C1 belegt.

Es tragen die Terme ①, ③ und ⑤ der Fig. C2 bei.

Es gilt mit $(p, q) \in \text{BI}$

$$\langle Y_{-p-q}^+ Y_{-p-q} \rangle = \frac{1}{Z_{pq}} (h_p h_{-p} h_q - a_1 a_3 h_{-p} - a_2 a_4 h_p) \quad (C8)_2$$

- 3) $(p_1, q_1) = (0, 0)$. Hier trägt nur Term ① der Fig. C3 bei

$$\langle Y_{00}^+ Y_{00} \rangle = \frac{h_1}{Z_{00}} = \frac{h_1}{h_1 h_2 - 2} \quad (C8)_3$$

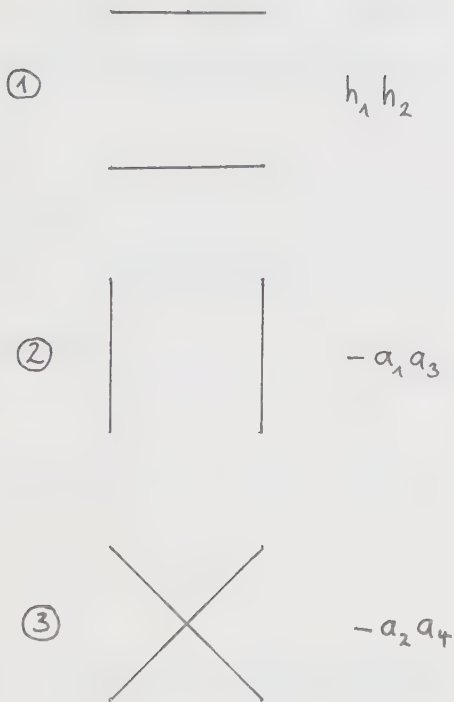


Fig. C3 Die Beiträge zum Graßmannintegral Z_{00} .

Alle 3 Fälle lassen sich zusammenfassen in

$$\langle \gamma_{pq}^+ \gamma_{pq} \rangle = \frac{N_{pq}}{Z_{pq}} \quad \forall (p,q) \quad (C9)$$

falls man für die Nullmode $Z_{p=oq=o} = (h_1 h_2 - 2)^2$ aus (C7) berücksichtigt.

Für die Korrelationsfunktion im Ortsraum ergibt (C2)

$$\langle \gamma_{ij}^+ \gamma_{ek} \rangle = \frac{1}{NM} \sum_{\substack{pq \\ \text{gesamt}}} e^{i((\ell-i)p + (k-j)q)} \frac{N_{pq}}{Z_{pq}} \quad (C10)$$

$$\text{mit } N_{pq} = h_p h_{-p} h_{-q} - (h_p + h_{-p}) \quad (C11)$$

und Z_{pq} aus (C7).

Diese Form der Zweipunktfunktion genügt um (4.21) zu sehen.

Nun soll noch gezeigt werden, daß die Zweipunktfunktionen $\langle y_{00} y_{\ell k} \rangle$ bzw. $\langle y_{00}^+ y_{\ell k}^+ \rangle$ verschwinden.

Betrachtet man Fig. C1 so sieht man, daß

$$\langle Y_{p'q'} Y_{pq} \rangle = 0 \quad \text{für} \quad \begin{cases} (p'q') = (pq) \in \text{BI} \\ (p'q') = (pq) \in \text{BII} \end{cases} \quad (\text{C12})$$

Falls $(p'q') \in \text{BI}$ und $(pq) \in \text{BII}$ gilt

$$\langle Y_{p'q'} Y_{pq} \rangle = -\delta_{p'-p} \delta_{q'-q} a_1 a_2 (h_p + h_{-p}) \quad (\text{C13})_1$$

Falls $(p'q') \in \text{BII}$ und $(pq) \in \text{BI}$ gilt

$$\langle Y_{p'q'} Y_{pq} \rangle = +\delta_{p'-p} \delta_{q'-q} a_1 a_2 (h_p + h_{-p}) \quad (\text{C13})_2$$

Da die Zweipunktfunktionen im Ortsraum

$$\langle Y_{00} Y_{\ell k} \rangle = \frac{1}{NM} \sum_{pq} \sum_{p'q'} e^{i(\ell p + k q)} \langle Y_{p'q'} Y_{pq} \rangle \quad (\text{C14})$$

über Bereich BI und BII geht, heben sich die Beiträge (C13) weg. Ebenso zeigt man, daß $\langle y_{00}^+ y_{\ell k}^+ \rangle = 0$.

Anhang D

Verhalten der Skalenfunktionen für große und kleine Abstände

Für die Funktionen $F_{\pm}(r)$ nach (4.48) sollen hier Entwicklungen für große und kleine Abstände angegeben werden. Eine Ableitung ist in [53] durchgeführt.

(a) Für kleine Abstände $r \ll 1$ gilt: ($\tilde{r} = \mu r$)

$$F_{\pm}(\tilde{r}) \xrightarrow{\tilde{r} \rightarrow 0} \left(\frac{k^2+1}{k}\right)^{\frac{1}{8}} A \left[1 \pm \frac{\tilde{r}}{2} \Omega + \frac{\tilde{r}^2}{16} \pm \frac{\tilde{r}^3}{32} \Omega + \frac{\tilde{r}^4}{256} \left(\Omega - \Omega^2 + \frac{1}{8} \right) + \sigma(\tilde{r}^5 \Omega^4) \right] \quad (D1)$$

$$\text{mit } \Omega = \ln \left(\frac{\tilde{r}}{8} + \gamma_E \right) \quad (D2)$$

und der Eulerkonstante $\gamma_E = 0.5772 \dots$ sowie der Konstanten $A = 0.6450 \dots$.
Der Asymmetrieparameter k ist

$$k = \frac{2\sqrt{\alpha}}{1-\alpha} \quad \text{mit } \alpha = e^{-2x_{1c}} \quad (D3)$$

(b) Für große Abstände $r \gg 1$ gilt: ($\tilde{r} = \mu r$)

$$F_{+}(\tilde{r}) \xrightarrow{\tilde{r} \rightarrow \infty} \left(\frac{k^2+1}{k}\right)^{\frac{1}{8}} (2\tilde{r})^{\frac{1}{4}} \frac{K_0(\tilde{r})}{\pi} + \sigma(e^{-3\tilde{r}}) \quad (D4)$$

$$F_{-}(\tilde{r}) \xrightarrow{\tilde{r} \rightarrow \infty} \left(\frac{k^2+1}{k}\right)^{\frac{1}{8}} (2\tilde{r})^{\frac{1}{4}} \left(1 + \frac{1}{\pi^2} \left\{ (K_1^2(\tilde{r}) - K_0^2(\tilde{r})) \tilde{r}^2 - \tilde{r} K_0(\tilde{r}) K_1(\tilde{r}) + \frac{1}{2} K_0^2(\tilde{r}) \right\} + \sigma(e^{-4\tilde{r}}) \right) \quad (D5)$$

Mit der Entwicklung der Besselfunktionen für große Abstände

$$K_0(r) = \sqrt{\frac{\pi}{2r}} e^{-r} \left\{ 1 - \frac{1}{8r} + \frac{9}{128r^2} - \frac{75}{1024r^3} \pm \dots \right\} \quad (D6)$$

$$K_1(r) = \sqrt{\frac{\pi}{2r}} e^{-r} \left\{ 1 + \frac{3}{8r} - \frac{15}{128r^2} + \frac{105}{1024r^3} \pm \dots \right\} \quad (D7)$$

ergibt sich

$$F_+(\tilde{r}) \xrightarrow{\tilde{r} \rightarrow \infty} \left(\frac{\eta}{2\sqrt{k} \pi^2 \tilde{r}} \right)^{\frac{1}{4}} e^{-\tilde{r}} \quad (D8)$$

$$F_-(\tilde{r}) \xrightarrow{\tilde{r} \rightarrow \infty} \left(\frac{2\eta \tilde{r}}{\sqrt{k}} \right)^{\frac{1}{4}} \left[1 + \frac{1}{8\pi \tilde{r}^2} e^{-2\tilde{r}} \right] \quad (D9)$$

Für die niedrigsten Terme der Entwicklung in (4.59) gilt für große Abstände
(k = 1)

$$\hat{F}_+^{(1)}(\tilde{r}) \xrightarrow{\tilde{r} \rightarrow \infty} (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \frac{e^{-\tilde{r}}}{\tilde{r}^{\frac{1}{2}}} \left(1 - \frac{1}{8\tilde{r}} + \frac{9}{128\tilde{r}^2} + \dots \right) \quad (D10)$$

$$\hat{F}_+^{(3)}(\tilde{r}) \xrightarrow{\tilde{r} \rightarrow \infty} 2^{-5} (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \frac{e^{-3\tilde{r}}}{\tilde{r}^{\frac{3}{2}}} \left(1 - \frac{51}{8\tilde{r}} + \dots \right) \quad (D11)$$

Für den Fall $T < T_c$ gilt die Entwicklung (4.75)

$$\hat{F}_-^{(2)}(\tilde{r}) \xrightarrow{\tilde{r} \rightarrow \infty} 2^{-2} (2\pi)^{-1} \frac{e^{-2\tilde{r}}}{\tilde{r}^2} \left(1 - \frac{7}{4\tilde{r}} + \dots \right) \quad (D12)$$

$$\hat{F}_-^{(4)}(\tilde{r}) \xrightarrow{\tilde{r} \rightarrow \infty} 3 \cdot 2^{-10} (2\pi)^{-2} \frac{e^{-4\tilde{r}}}{\tilde{r}^8} \left(1 - \frac{31}{2\tilde{r}} + \dots \right) \quad (D13)$$

Literaturverzeichnis

- [1] W. Heisenberg, Einführung in die einheitliche Feldtheorie der Elementarteilchen, S. Hirzel, Stuttgart (1967).
- [2] H. Harari, Phys.Lett. 86B, 83 (1979).
- [3] H.P. Dürr, W. Heisenberg, H. Mitter, S. Schlieder, K. Yamazaki, Zeitsch. für Naturforschung 14a, 441 (1959).
- [4] J.C. Pati und A. Salam, Phys.Rev. D10, 275 (1974).
- [5] H.P. Dürr, H. Saller, Nuovo Cim. 39A, 31 (1977); 48A, 505 (1978).
- [6] H.P. Dürr, H. Saller, Phys.Rev. D22, 1187 (1980).
- [7] H. Georgi, S.L. Glashow, Phys.Rev.Lett. 32, 438 (1974);
H. Georgi, H.R. Quinn, S. Weinberg, Phys.Rev.Lett. 33, 451 (1974).
- [8] H. Fritzsch, P. Minkowski, Ann. of Phys. 93, 193 (1975);
Nucl.Phys. B103, 61 (1976).
- [9] H.E. Stanley, Introduction to Phase Transition and Critical Phenomena, Oxford University Press, 1971.
- [10] S. Coleman, E. Weinberg, Phys.Rev. D7, 1888 (1973).
- [11] L. Onsager, Phys.Rev. 65, 117 (1944).
- [12] E.H. Lieb, D.C. Mattis, T.D. Schultz, Rev.of Mod.Physics 36, 856 (1964).
- [13] E.W. Montroll, R.B. Potts, J.C. Ward, J.Math.Phys. 4, 308 (1963);
T.T. Wu, Phys.Rev. 149, 380 (1966); H. Cheng, T.T. Wu, Phys.Rev. 164,
719 (1967).
- [14] R.Z. Bariev, Physics (Utrecht), 83A, 388 (1976);
Phys.Lett. 64A, 169 (1977);
B.M. McCoy, C.A. Tracy, T.T. Wu, Phys.Rev.Lett. 38, 793 (1977);
B.M. McCoy, T.T. Wu, Phys.Rev. D18, 1243 (1978);
D.B. Abraham, Phys.Lett. 61A, 271 (1977).
- [15] L.P. Kadanoff, Nuovo Cim., 44B, 276 (1966);
L.P. Kadanoff, M. Kohmoto, Ann. of Phys. 126, 371 (1980).

- [16] L.P. Kadanoff, H. Cera, Phys.Rev. B3, 3918 (1971).
- [17] T.T. Wu et al., Phys.Rev. B13, 316 (1976);
C.A. Tracy, B.M.McCoy, Phys.Rev. B12, (1975).
- [18] M. Sato, T. Miwa, M. Jimbo, Kyoto University Preprint
RIMS-207, (1976); 267 (1978).
M. Jimbo, T. Miwa, Kyoto University Preprint RIMS-317 (1980)
und Ref. ebenda.
- [19] F.J. Wegner, J. of Math.Phys. 12, 2259 (1971);
M. Srednicki, Phys.Rev. D21, 2878 (1980).
- [20] H.A. Kramers, G.H. Wannier, Phys.Rev. 60, 252 (1941).
- [21] G. 't Hooft, Nucl.Phys. B138, 1-25 (1978);
S. Stuart, Nucl.Phys. B154, 62-110 (1979).
- [22] H. Lehmann, K. Symanzik, W. Zimmermann, Nuovo Cim. 1, 1425 (1955);
Nuovo Cim. 11, 205 (1955).
- [23] H. Umezawa, Nuovo Cim. 40, 450 (1965);
L. Leplae, R.W. Sen, H. Umezawa, Suppl.Prog.Theor.Phys. (Kyoto,
Problems of Fundamental Physics (1965);
H. Umezawa, in Renormalization and Invariance in QFT, Edited by
E.R. Caianiello (Plenum Publ.Corp. 1973).
- [24] H.P. Dürr, W. Heisenberg, Zeits.Naturf. 16a, 726 (1961);
H. Saller, Nuovo Cim. 30A, 541 (1975).
- [25] S. Samuel, LBL-9347 Preprint (1979).
- [26] H. Weyl, Zeits. für Phys. 56, 330 (1929).
- [27] H.P. Dürr, N.J. Winter, Nuovo Cim. 70A, 467 (1970).
- [28] J. Bardeen, L.N. Cooper, J.R. Schrieffer, Phys.Rev. 108, 1175-μ104 (1957).
- [29] V.L. Ginzburg, L.D. Landau, JETP 20, 1064 (1950);
C.J. Gorter, H.B.G. Casimir, Phys.Z. 35, 963 (1934).
- [30] L.P. Gorkov, Sov.Phys. JETP 36, 1364 (1959); Sov.Phys. JETP 34, 505 (1958).
- [31] B. Kaufman, Rev. 76, 1232 (1949);
B. Kaufman, L. Onsager, Phys.Rev. 76, 1244 (1949).

- [32] M.J. Tejjwani et al., Phys.Rev.Lett. 44, 152 (1980).
- [33] For reviews G.F. Newell, E.W. Montroll, Rev.Mod.Phys. 25, 353 (1953);
W.J. Camp, M.E. Fisher, Phys.Rev. B6, 946 (1972).
- [34] Suzuki, Comm.Math.Phys. 57, 193-200 (1977).
- [35] P. Jordan, E. Wigner, Z.Physik 47, 631 (1928).
- [36] E. Fradkin, L. Susskind, Phys.Rev. D17, 2637 (1978).
- [37] J.B. Kogut, An introduction to lattice gauge theory and spin systems,
Rev. of Mod.Physics, 51, 659 (1979).
- [38] N.N. Bogoljubov, Fortsch. der Physik 6, 605-682 (1958);
J.G. Valatin, Nuovo Cim. 7, 843-857 (1958).
- [39] J.D. Bjorken, S.D. Drell, Relativistische Quantenfeldtheorie
(B.I. Mannheim 1967).
- [40] C.A. Tracy, B.M. McCoy, Phys.Rev. B12, 368 (1975).
- [41] B.M. McCoy, T.T. Wu, Phys.Lett. 72B, 219 (1977).
- [42] R.F. Streater, A.S. Wightman, PCT, Spin and Statistics, and
all that, W.A. Benjamin, Inc. New York (1964) Kap. 3.4.
- [43] C. Domb, Advances in Physics 9, 149 (1960);
J.Roy.Stat.Soc. Serie B 26, 367 (1964);
M.F. Sykes, J.Math.Phys. 2, 52 (1961).
- [44] R. Peierls, Proc. Cambridge Phil.Soc. 32, 477 (1936).
- [45] C. Gruber, A. Hintermann und D. Merlini, Group Analysis of
Classical Lattice Systems, Springer Lecture Notes in Physics, Vol. 60.
- [46] S. Samuel, LBL-8300 Preprint (1978).
- [47] F.A. Berezin, The Method of Second Quantization (Academic Press,
New York, 1966).
- [48] B.M. McCoy, T.T. Wu, The Two-Dimensional Ising Modell
(Harvard University, Cambridge, Mass., 1973).
- [49] L.P. Kadanoff, Nuovo Cim. 44B, 276 (1966).
- [50] E.W. Montroll, Brandeis lectures, Vol. 2, (1966), Gordon and Breach.

- [51] D.B. Abraham, Commun.Math.Phys. 59, 17 (1978).
- [52] J. Schwinger, Phys.Rev. 91, 713 (1953).
- [53] T.T. Wu, B.M. McCoy, C.A. Tracy, E. Barouch, Phys.Rev. B13, 316 (1976).
- [54] M. Gell-Mann, F.E. Low, Phys.Rev. 95, 1300 (1954);
K.G. Wilson, Phys.Rev. B4, 3174 (1971);
S. Weinberg, Phys.Rev. D8, 3497 (1973).
- [55] K.G. Wilson, Phys.Rev. D2, 1473 (1970).
- [56] G.C. Wick, Phys.Rev. 96, 1124 (1954);
K. Osterwalder, R. Schrader, Phys.Rev.Lett. 29, 1423 (1972).
- [57] G. Gallavotti, Rev. del Nuovo Cim. 2, 133 (1972).
- [58] B. Schroer, T.T. Truong, Nucl.Phys. B144, 80 (1978);
B154, 125 (1979).
- [59] I. Syozi, Transformation of Ising Models in Phase Transitions
and Critical Phenomena, C. Domb, M.S. Green Academic Press, 1972.
- [60] H.P. Dürr, MPI-Preprint MPI-PAE/PTh 39/80, 4/81 (1981).
- [61] C. Domb, PhilMag.Suppl. 9, 151 (1960).

L E B E N S L A U F

Am 17. Juli 1947 wurde ich als Sohn des Bankangestellten Stephan Weinzierl und seiner Ehefrau Klara Weinzierl, geborene Utz, in München geboren. Von 1953 bis 1958 besuchte ich die Volksschule am Lehrer-Götz-Weg in München-Trudering. 1967 legte ich am Luitpold-Gymnasium, das ich 9 Jahre lang besuchte, das Abitur ab.

Nach meiner 18-monatigen Militärdienstzeit und der Teilnahme an der "Münchener-Kordillieren-Fahrt 69" begann ich das Studium der Physik an der TU-München mit dem Wintersemester 69/70. In den Sommern 1970 und 71 legte ich die Diplomvorprüfungen 1. und 2. Teil ab. In den Semesterferien leitete ich die alpinen Expeditionen "Münchener Grönlandfahrt 70" und "Bayerische Himalayafahrt 72". Ab 1972 wurde ich Stipendiat der Studienstiftung des deutschen Volkes, der ich 8 Jahre angehörte. 1972 besuchte ich den Abschlußkurs der Bergführerausbildung. Die Berufsbezeichnung "staatlich geprüfter Berg- und Skiführer" wurde 1975 vom Sportzentrum der TU-München vergeben. 1973 heiratete ich Michaela Weinzierl, geborene Wegert.

Im Frühjahr 76 legte ich die Diplomprüfung ab. Die Diplomarbeit fertigte ich bei Professor Dr. W. Wild über ein Thema der Kernphysik an. Nach einer einjährigen Studienreise in den Orient arbeite ich seit dem Sommer 1977 als Doktorand am Max-Planck-Institut für Physik und Astrophysik auf dem Gebiet der theoretischen Hochenergiephysik. Im Sommer 1980 wurde mein Sohn Benno geboren.

